Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Uma teoria de super-representações para grupos de Lie nilpotentes

Jocelyn Lochon

Dissertação
Mestrado em Matemática

2014

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Uma teoria de super-representações para grupos de Lie nilpotentes

Jocelyn Lochon

Dissertação
Mestrado em Matemática

Orientador: Professor Carlos Alberto Martins André

2014

Resumo

Pretende-se com este trabalho introduzir o conceito de *Teoria de super-representações* para grupos de Lie. Esta vem a ser uma generalização da Teoria de supercaracteres, existente para grupos finitos.

São abordados grupos que são simultaneamente grupo álgebra e grupos de Lie, sendo feita uma construção concreta de uma teoria de super-representações. Esta construção tem como base o método apresentado por Diaconis e Isaacs, por sua vez inspirado no método das órbitas de Kirillov.

Numa primeira fase apresentamos os conceitos e resultados necessários da teoria dos Grupos de Lie e da teoria da representação, para prosseguir com a definição e construção de uma teoria de super-representações. Tendo esta última, é feito um estudo não só de algumas propriedades tal como é apresentado um resultado de factorização em produtos tensoriais.

Palavras chaves: Super-representações, Grupos de Lie, Grupos Álgebra, Teoria da Representação, Supercaracteres

Abstract

The aim of this work is to introduce the concept of *Theory of super-representations* for Lie groups. This turns out to be a generalization of the theory supercaracteres, existing for finite groups.

We adress to groups that are both algebra groups and Lie groups, and we construct explicitely a super-representation theory for these groups. This construction is based on the method presented by Diaconis and Isaacs, in turn inspired by the Kirillov's orbit method.

Initially, the basic concepts and results from the theory of Lie groups and representation theory are presented, to proceed with the definition and construction of a theory of super-representations. Fundamental super-representation's properties are studied and a factorization result is presented.

Keywords: Super-representations, Lie Groups, Algebra Groups, Representation Theory, supercharacters.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Professor Carlos André, não só pela sugestão do tema desenvolvido nesta dissertação, mas também por toda a ajuda que deu ao longo do trabalho.

Aos dois outros "‘mosqueteiros"’, João 'Brito' Dias e Pedro Matos, fica aqui o meu obrigado pela ajuda que me deram. Também agradeço ao Joaquim, companheiro fiel e irredutível, sem o qual não seria possível realizar esta dissertação.

Por todo o apoio e motivação dado, agradeço o Alex e a Camila, que sempre estiveram presentes e pacientes para me ouvir.

Acima de tudo, agradeço ao Adrien, por nunca me deixar desistir.

Conteúdo

Introdução

A teoria da representação de grupos remonta ao final do século XIX. Nesta altura Frobenius generaliza a ideia de carácter; ainda que na altura a noção fosse diferente da de os nossos dias, foi o início deste ramo da Matemática. Nestes primórdios apenas grupos finitos são considerados.

Resultados marcantes desta primeira fase são *teorema da reciprocidade*, de Frobenius, o lema de Schur, *teorema pq* de Burnside e o *teorema da semi-simplicidade da álgebra do grupo* demonstrado por Molina.

A teoria de representações rapidamente deixou de ser exclusiva dos grupos finitos. A necessidade de estudar grupos topológicos foi crescendo, e dada a força da teoria da representação, esta foi estendida a estes grupos.

Um exemplo importante é o dos sistemas dinâmicos. Por sistema dinâmico entendemos um triplo (X, μ, G), onde (X, μ) é um espaço de medida e G um grupo de transformações que preserva a medida. Ora, se X for um espaço de fase, μ a medida de Liouville e G o grupo que define a evolução do sistema, a teoria espectral de um tal sistema dinâmico não é mais que o estudo das representações unitárias de G em $L^2(G, \mu)$.

Assim começa o estudo dos grupos compactos. Nestes grupos toda a representação irredutível é de dimensão finita, como mostrou Weyl, sendo um dos grandes resultados desta fase. A finitude das representações irredutíveis permite generalizar não só conceitos como resultados, como por exemplo a reciprocidade de Frobenius. Um outro importante resultado é o *teorema de Haar*, que garante a existência de uma medida finita e invariante.

No entanto, o estudo dos grupos de Lie e as suas aplicações mostraram que era necessário estudar grupos não compactos, tal como as representações de dimensão infinita. Começa então o estudo dos grupos localmente compactos.

É neste contexto que nos anos 40 do século XX Gelfand e Raikov demonstram que para grupos localmente compactos existe uma decomposição de qualquer representação em integral directo de representações irredutíveis. Fica assim a teoria da representação dos grupos localmente compactos reduzida ao estudo das representações irredutíveis.

Por outro lado, já nos anos 50, Mackey avança com estudos importantes na teoria dos grupos localmente compactos. Nomeadamente define a indução de representações, generalizando a indução no sentido de Frobenius para grupos finitos.

Fica assim definida a área de trabalho da teoria geral.

No que diz respeito aos grupos de Lie, numa primeira instância estes dividiram-se em duas classes: semi-simples e resolúveis, em particular os nilpotentes. Dixmier é uma referência em ambos os casos. A sua abordagem passa pelo estudo da álgebra envolvente e na tradução de propriedades algébricas dessa álgebra para as representações.

No entanto, ainda que o seu trabalho tenha sido de extrema importância, nos grupos semi-simples Harish-Chandra é a referência. Este introduz o conceito daquilo que hoje chamamos *módulos de Harish-chandra*, nos anos 60, sendo o estudo feito com base nestes objectos. Grande parte da teoria é assim resolvida.

Por outro lado, sensivelmente na mesma altura, Kirillov ataca o problema dos grupos nilpotentes, nomeadamente os grupos conexos e simplesmente conexos. Graças ao *método das órbitas* Kirillov consegue parametrizar (geométricamente) e descrever as representações irredutíveis destes grupos.

Grosso modo, o método consiste no seguinte: dado G um grupo de Lie nilpotente, conexo e simplesmente conexo, se $\mathfrak{g}$ denotar a sua álgebra de Lie, considere-se o seu dual $\mathfrak{g}^*$. Dado um elemento de $\mathfrak{g}^*$ Kirillov constrói um carácter de um subgrupo de G; recorrendo à indução no sentido de Mackey, a representação obtida vem a ser irredutível.

Considerando o contra-gradiente da acção coadjunta em $\mathfrak{g}^*$, Kirillov faz uma divisão do dual em órbitas coadjuntas e prova que dois elementos na mesma órbita dão origem a representações equivalentes.

Deste modo as classes de equivalência das representações irredutíveis estão em bijeção com as órbitas coadjuntas dos elementos do dual da álgebra de Lie. Temos assim a *correspondência de Kirillov.* Mais tarde Brown veio a provar que a correspondência é de facto um homeomorfismo.

O método das órbitas resolve, ou a fornece ferramentas suficientes, para responder a questões clássicas da teoria da representação para grupos nilpotentes. Dada a força deste método rapidamente foi aplicado a outros grupos, tendo-se obtidos resultados interessantes.

No âmbito dos grupos finitos, a determinação dos caracteres irredutíveis do grupo $U_n(\mathbb{K})$ (o grupo das matrizes triangulares superiores do tipo $n \times n$ com entradas num corpo finito $\mathbb{K}$ e uns na diagonal), é visto como um problema "selvagem". Ainda que se conheçam algumas representações irredutíveis, estamos longe de conhecer a tabela de caracteres destes grupos.

Assim, nos asnos 90, André introduz os *caracteres básicos* para o grupo unitriangular finito. Estes caracteres vêm a recuperar as propriedades essenciais dos caracteres irredutíveis, nomeadamente, são ortogonais entr si e a soma de todos eles (contando multiplicidades) é o carácter regular. Permite-se assim uma alternativa aos caracteres irredutíveis.

A construção destes caracteres é inspirado no método das órbitas, podendo ser encarado como um relaxamento da acção coadjunta. Para esta construção era necessário exigir que n fosse menor que a característica de $\mathbb{K}$. No entanto, de modo independente André e Yan (um aluno de Kirillov) conseguem fazer cair esta hipótese.

Diaconis rapidamente se apercebeu da utilidade destes caracteres e recorreu a eles no estudo de caminhos aleatórios sobre o grupo unitriangular finito. Mais tarde, juntamente com Isaacs generalizam estas ideias para aquilo que hoje chamamos de *teoria de supercaracteres.*

Esta pode ser axiomatizada do seguinte modo: sejam G um grupo finito, $\mathscr{X}$ uma partição do conjunto $\mathrm{Irr}(G)$ dos caracteres irredutíveis de G e $\mathscr{K}$ uma partição de G, dizemos que $\mathscr{X}$ e $\mathscr{K}$ definem uma teoria de supercaracteres se:

- $\#\mathscr{K} = \#\mathscr{X}$;
- $\{1\} \in \mathscr{K}$;
- para todo o $X \in \mathscr{X}$, o carácter $\sigma_X := \sum\limits_{\psi \in X} \psi(1)\psi$ é constante nos membros de $\mathscr{K}$

Aos elementos de $\mathscr{K}$ chamamos superclasses e os supercaracteres são qualquer múltiplo dos caracteres σ_X, com $X \in \mathscr{X}$.

Dado um grupo G este admite sempre duas teorias de supercaracteres, nomeadamente: a teoria onde as superclasses são as classes de conjugação e os supercaracteres são os caracteres irredutíveis; a teoria onde $\mathscr{K} = \{\{1\}, G \setminus \{1\}\}$, e $\mathscr{X} = \{\{1_G\}, \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}\}$.

Diaconis e Isaacs, seguindo as ideias de Yan, generalizam a construção de André para obter uma teoria de supercaracteres para grupos álgebra. À semelhança do método das órbitas, os supercarcateres estão em bijeção com as órbitas de uma determinada acção.

A filosofia inerente aos supercaracteres é aglomerar os caracteres (e portanto representações) irredutíveis de um modo disjunto por forma a obter uma colecção de objectos que, de alguma maneira, substituam os caracteres irredutíveis quando estes não são conhecidos, ou são complicados de determinar. Esta teoria alternativa tem vindo a ter um grande desenvolvimento nos últimos anos. Exemplos de algumas aplicações podem ser encontrados, por exemplo, em [33], onde caminhos aleatórios sobre grupos de matrizes é estudado recorrendo aos supercaracteres, ou em [34], onde a teoria é aplicada no âmbito da teoria dos números.

Neste trabalho pretendemos transportar e adaptar esta filosofia para os grupos de Lie, nomeadamente para grupos álgebra reais. Numa primeira instância apresentamos resultados gerais da teoria da representação bem como o método das órbitas de Kirillov, para prosseguir à generalização dos supercarateres, as *super-representações.*

No que diz respeito aos grupos álgebra seguiremos o método de Diaconis e Isaacs de modo a construir uma teoria explícita de super-representações. Iremos frequentemente recorrer ao método das órbitas bem como à maquinaria de Mackey.

Ainda que a correspondência de Kirillov descreva as representações irredutíveis, no caso dos grupos álgebra temos um resultado de factorização de super-representações. Assim a determinação das super-representações torna-se algo mais fácil e expedito que as representações irredutíveis.

Assim este trabalho fornece uma primeira introdução à teoria das super-representações para grupos de Lie, transportando a linguagem dos supercaracteres para novos grupos, abrindo portas a um desenvolvimento futuro da teoria de super-representações.

1 Grupos e Álgebras de Lie nilpotentes

O nosso estudo será centrado numa classe particular de grupos de Lie nilpotentes, os *grupos álgebra*. Assim, faremos uma breve introdução aos grupos e álgebras de Lie nilpotentes, apresentando noções e resultados gerais.

Note-se que serão focados apenas grupos de Lie reais de dimensão finita, e portanto todas as álgebras de Lie consideradas serão de dimensão finita. Assim sendo, o teorema de decomposição de Levi, que afirma que qualquer álgebra de Lie decompõe-se, como soma directa de uma álgebra resolúvel e de uma semissimples, fornece assim divisão natural e importante da teoria das álgebras de Lie. Neste âmbito as álgebras nilpotentes revelam-se uma classe bastante abrangente de álgebras resolúveis, com propriedades e resultados interessantes.

Além disso, os grupos de Lie nilpotentes, associados a álgebras de Lie nilpotentes, são objectos que surgem de modo natural noutras áreas da Matemática, como por exemplo no estudo de sistemas mecânicos hamiltonianos.

1.1 Álgebras de Lie Nilpotentes

As álgebras de Lie, ou grupos de Lie infinitesimais na antiga terminologia, aparecem no estudo dos grupos de Lie como uma linearização deste em volta da identidade.

No que segue serão sempre consideradas álgebras de Lie de dimensão finita. Muitas das definições e resultados apresentados são válidos para qualquer corpo de característica zero, no entanto iremos apenas considerar álgebras de Lie sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, definimos a *série central descendente* de $\mathfrak{g}$ recursivamente por:

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(n)}]$$

Note-se que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}^{(n)}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.

Definição 1 (Álgebra de Lie Nilpotente)**.** *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ diz-se nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$*

Se $\mathfrak{g}$ for uma álgebra de Lie nilpotente e n for o menor natural tal que $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$, diz-se que $\mathfrak{g}$ é *n-nilpotente*. Notamos que qualquer sub-álgebra de Lie ou quociente de $\mathfrak{g}$ é ainda nilpotente. Além disso o seu centro é não trivial, pois qualquer elemento de $\mathfrak{g}^{(n-1)}$ comuta com todos os elementos de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 1. *Qualquer álgebra de Lie comutativa é trivialmente nilpotente ($\mathfrak{g}^{(2)} = 0$). Um outro exemplo de especial interesse é a álgebra $\mathfrak{u}_n$ das matrizes triangulares estritamente superiores de tipo $n \times n$, com o parêntesis de Lie definido como o comutador de matrizes, isto é, dados $a, b \in \mathfrak{u}_n$, $[a, b] = ab - ba$. Neste caso temos $\mathfrak{u}_n^{(n+1)} = 0$*

Este ultimo exemplo será constantemente referido, pois não só terá grande importância, como é um exemplo fácil de visualizar.

Seguem dois lemas de grande importância no desenvolvimento da teoria.

Lema 1.1.1. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Lie de codimensão 1 Nestas condições $\mathfrak{h}$ é um ideal e, além disso $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathfrak{g}$ tal que $x \notin \mathfrak{h}$. Então $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}x$, isto como espaço vectorial.

Uma vez que $[x, x] = 0$ e $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, basta assim ver que $[x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Admitamos que tal não acontece. Então existe $y \in \mathfrak{h}$ tal que $\mathrm{ad}(y)x = [y, x] = \alpha x + y_1$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ diferente de zero e $y_1 \in \mathfrak{h}$. Escalonando adequadamente podemos tomar $\alpha = 1$.

Assim para todo o $n \in \mathbb{N}$ temos $ad(y)^n x = x + y_n$, onde $y_n \in \mathfrak{h}$, o que é absurdo pois $\mathfrak{g}$ é nilpotente. $\square$

O próximo resultado é estrutural. Diz respeito às álgebras de Lie nilpotentes de centro unidimensional. A sua importância, no que diz respeito à teoria da representação, é a sua utilidade em demonstrações feitas por indução.

Lema 1.1.2 (Lema de Kirillov). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente, não comutativa cujo o centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}z$ é unidimensional. Então, como espaço vectorial, $\mathfrak{g}$ decompõe-se numa soma directa*

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \omega = \mathbb{R}x \oplus \mathfrak{g}_0$$

onde $[x, y] = z$ e $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \omega$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Além disso $\mathfrak{g}_0$ é o centralizador de y.

Demonstração. Comecemos por notar que, se $\dim(\mathfrak{g}) \leq 2$, então $\mathfrak{g}$ é abeliana, logo podemos considerar o caso $\dim(\mathfrak{g}) \geq 3$. Uma vez que $\mathfrak{g}$ é nilpotente existe um ideal de dimensão 2, digamos $\mathfrak{g}_1$, tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{z}$ (basta ir tomando sucessivamente sub-álgebras de codimensão um até obtermos uma de dimensão dois, que será forçosamente um ideal).

Seja agora $y \in \mathfrak{g}_1$ tal que z e y formem uma base de $\mathfrak{g}_1$. Uma vez que y não está no centro de $\mathfrak{g}$ existe $x \in \mathfrak{g}$ tal que $[x, y]$ não é zero. No entanto $[x, y] \in \mathfrak{z}$, e portanto sem perda de generalidade podemos escolher x tal que $[x, y] = z$.

Denotemos por $\mathfrak{g}_0$ o sub-espaço de $\mathfrak{g}$ de todos os elementos que comutam com y. Ora podemos decompor $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \omega$. Vejamos agora que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \oplus \mathfrak{g}_0$.

Seja a um elemento arbitrário de $\mathfrak{g}$. Tem-se que $[a, y] = \alpha z$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Ora, $a - \alpha x$ comuta com y, portanto pertence a $\mathfrak{g}_0$, uma vez que $a = a - \alpha x + \alpha x$. Obtemos assim o desejado. □

Exemplo 2. *Voltemos a considerar a álgebra de Lie $\mathfrak{u}_n$. Ora $\mathfrak{u}_n$ tem centro $\mathfrak{z}$ unidimensional, gerado pelo elemento $e_{1,n}$, a matriz que só tem a entrada $(1, n)$ não nula, sendo esta igual a 1. Assim, pelo lema de Kirillov podemos decompor $\mathfrak{u}_n$, tomando $x = e_{1,n-1}$, $y = e_{n-1,n}$ e $\omega = \mathfrak{u}_n \setminus \{x, y, z\}$.*

A demonstração do próximo resultado não será feita, podendo ser consultada em [24].

Teorema 1.1.3 (Teorema de mergulho de Birkhoff). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente sobre $\mathbb{R}$. Então existe um espaço vectorial real de dimensão finita V e um homomorfismo injectivo de álgebras de Lie $\iota : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ tal que, para todo o $x \in \mathfrak{g}$, $\iota(x)$ é nilpotente.*

Este teorema é de extrema importância, pois permite passar de um problema relativo a uma álgebra de Lie nilpotente a um problema de uma álgebra de Lie de matrizes, onde a estrutura é bem conhecida. Como será visto na proxima secção este teorema permite demonstrar resultados de interesse.

1.2 Grupos de Lie Nilpotentes

Um grupo de Lie G diz-se nilpotente se a sua álgebra de Lie for nilpotente. Iremos apenas considerar grupos de Lie conexos e simplesmente conexos, e se o grupo for conexo a nilpotência admite uma caracterização à luz da teoria de grupos.

Á semalhança das álgebras de Lie, dado um grupo de Lie G defina-se a *séie central descendente* recursivamente por:

$$G^{(1)} = G$$
$$G^{(n+1)} = [G, G^{(n)}] \quad n \in \mathbb{N}$$

Onde o parêntesis recto denota o comutador usual de um grupo, isto é dados $g, h \in G$, $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ e dados H_1, H_2 subgrupos de G, $[H_1, H_2]$ é o subgrupo gerado por todos os elementos da forma $[h_1, h_2]$ com $h_1 \in H_1$ e $h_2 \in H_2$.

Assim, um grupo de Lie G de Lie conexo é nilpotente se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $G^{(n)} = 1$.

Note-se que se U_n for o grupo de Lie das matrizes unitriangulares do tipo $n \times n$, isto é, as matrizes triangulares superiores com uns na diagonal, então a sua álgebra de Lie é $\mathfrak{u}_n$. Sendo $\mathfrak{u}_n$ nilpotente, então U_n é um grupo de Lie nilpotente.

Fixemos alguma notação: se G for um grupo de Lie denotaremos com a letra gótica minúscula correspondente, neste caso $\mathfrak{g}$, a sua álgebra de Lie.

Sabemos que dado um grupo de Lie G a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é um difeomorfismo local. Assim, tome-se $x, y \in \mathfrak{g}$ numa vizinhança adequada de zero, podemos considerar o produto de Campbell-Baker-Hausdorff:

$$x \star y := \log(\exp(x)\exp(y))$$

A solução de $z = x \star y$ é dada pela *fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff.*

Teorema 1.2.1. *Sejam $x, y, z \in \mathfrak{g}$ tais que $z = x \star y$, temos então que*

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{k_i+l_i \geq 1} \frac{[x^{k_1}y^{l_1}...x^{k_m}y^{l_m}]}{k_1!l_1!...k_m!l_m!}$$

Onde $x_0^n = [x_0, [x_0, ..., x_0]]$ e $[x_0x_1x_2] := [x_0, [x_1, x_2]]$.

Note-se que se o grupo for nilpotente a série acima descrita é forçosamente finita.

Temos assim que

$$x \star y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}([x, [x, y]] - [y, [y, x]]) - \frac{1}{24}[y, [x, [x, y]]] - ...$$

Computar explicitamente a fórmula é muitas vezes impraticável, no entanto o carácter teórico desta permite resolver vários problemas. Uma vez que a lei de grupo é escrita em termos do parêntesis de Lie o estudo de algumas propriedades do grupo ficam assim reduzidas ao estudo da álgebra de Lie.

Teorema 1.2.2. *Sejam G um grupo de Lie nilpotente, conexo e simplesmente conexo, e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie, então a exponencial é um difeomorfismo analítico*

Demonstração. A ideia da prova é demonstrar o resultado para U_n, com n arbitrário e de seguida aplicar o teorema do mergulho de Birkhoff.

Considere-se assim U_n e a sua álgebra de Lie $\mathfrak{u}_n$. Temos que a exponencial é dada pela série usual:

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Além disso dada a natureza de $\mathfrak{u}_n$ esta soma é finita e o logaritmo usual de matrizes é a sua inversa. Vem assim que a exponencial é um difeomorfismo analítico.

Seja agora G um qualquer subgrupo conexo de U_n e seja $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Podemos identificar de modo natural $\mathfrak{g}$ como uma sub-álgebra de $\mathfrak{u}_n$, isto é, podemos supor que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}_n$. Deste modo, a exponencial de $\mathfrak{g}$ não mais que a restrição da exponencial de matrizes, e claramente $\exp(\mathfrak{g}) \subseteq G$.

Seja agora U uma vizinhança conexa de 0 tal que a restrição da exponencial a U é um difeomorfismo para $V \subseteq G$. Portanto V é um aberto de G e temos $\bigcup V^m = G$.

Ora, por indução, e recorrendo à fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff concluímos que para todo o m, $V^m \subseteq \exp(\mathfrak{g})$ e, portanto $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é também um difeomorfismo analítico.

Tome-se G um grupo de Lie nilpotente, conexo e simplesmente conexo arbitrário. Pelo teorema do mergulho de Birkhoff, podemos tomar n adequado de modo a ter um homomorfismo injectivo (e portanto um homeomorfismo na imagem) $\iota : \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}_n$. Tome-se $\mathfrak{h} = \iota(\mathfrak{g})$.

Sendo G simplesmente conexo, ι induz a aplicação $\iota_* : G \to U_n$, em que $d\iota_* = \iota$. Vem assim que se tomarmos $H = \iota_*(G)$ a sua álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$, e pelo o que já foi visto H e $\mathfrak{h}$ são difeomorfos.. Assim H é simplesmente conexo, o que permite concluir ι_* é um isomorfismo na imagem. O resultado segue. □

Atendendo à demonstração deste último resultado obtemos os seguintes corolários importantes:

Corolário 1.2.3. *Todo o grupo de Lie nilpotente, conexo e simplesmente conexo admite um mergulho fiel para um subgrupo de U_n, para algum n.*

Por sua vez este resultado dá azo ao seguinte:

Corolário 1.2.4. *Dado um grupo de Lie nilpotente, conexo e simplesmente conexo, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, a fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff é válida para todos $x, y \in \mathfrak{g}$.*

A ideia é provar que a fórmula é válida para o caso U_n; mergulhando em U_n o resultado segue.

Para finalizar esta secção enuncie-se um resultado que liga as álgebras de Lie aos grupos de Lie conexos e simplesmente conexos. A sua demonstração é clássica, podendo ser encontrada em [7], por exemplo.

Teorema 1.2.5. *A cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ corresponde um único grupo de Lie G conexo e simplesmente conexo que tem $\mathfrak{g}$ como álgebra de Lie.*

Assim, se $\mathfrak{g}$ for uma álgebra de Lie nilpotente, existe um único grupo de Lie G nilpotente, conexo e simplesmente conexo que tem $\mathfrak{g}$ como álgebra de Lie.

1.2.1 Acção coadjunta

No que diz respeito à teoria da representação de grupos de Lie nilpotentes, conexos e simplesmente conexos a acção coadjunta de G no dual de $\mathfrak{g}$ é ferramenta fundamental, pois as representações irredutíveis são parametrizadas pelos elementos do dual e pelas órbitas desta acção, as órbitas coadjuntas.

Todos os grupos nesta secção serão considerados nilpotentes, conexos e simplesmente conexos.

Relembremos alguns factos e definições relativas à representação adjunta. Seja G um grupo de Lie. Dado $g \in G$ denotemos por C_g a conjugação por g, isto é, $C_g : G \to G$ a aplicação dada por

$$C_g(h) = ghg^{-1} \quad h \in G$$

Assim define-se a representação adjunta como sendo $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ tal que, para todo o $g \in G$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ x &\mapsto d(C_g)_1 x \end{aligned}$$

Note-se que podemos ainda derivar a representação adjunta do grupo, obtendo assim naturalmente a representação adjunta de $\mathfrak{g}$, denotada por $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, sendo $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ a álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, em que, para todo o $x \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ y &\mapsto [x, y] \end{aligned}$$

Assim, se G for um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie, G actua, por meio do contragradiente da acção adjunta, no espaço dual $\mathfrak{g}^* = \{f : \mathfrak{g} \to \mathbb{R} : f \text{ é linear}\}$ do modo seguinte:

$$(\mathrm{Ad}^* g).f(x) = f(\mathrm{Ad}(g^{-1})x) \quad g \in G,\ x \in \mathfrak{g},\ f \in \mathfrak{g}^*$$

Esta acção é chamada a *acção coadjunta*. De um modo análogo podemos ainda considerar a acção contragradiente de ad, definido

$$(\mathrm{ad}^* x).f(y) = f(\mathrm{ad}(-x)y) = f([y, x]) \quad x, y \in \mathfrak{g},\ f \in \mathfrak{g}^*$$

Consideremos agora $f \in \mathfrak{g}*$ e os estabilizadores de f para as acções supramencionadas:

$$\mathscr{R}_f = \{g \in G : (\mathrm{Ad}^* g)f = f\}$$
$$\mathbf{r}_f = \{x \in \mathfrak{g} : (ad^* x)f = 0\}$$

Tendo em conta que a acção ad^* é dada pelo diferencial da acção Ad^*, vem que $\mathbf{r}_f$ é a álgebra de Lie de $\mathscr{R}_f$.

Prova-se ainda que se $\mathscr{R}_f$ é conexo, e portanto $\exp(\mathbf{r}_f) = \mathscr{R}_f$ (conferir [24] lema 1.3.1).

Uma descrição assaz de $\mathbf{r}_f$ advém da seguinte observação: dado $f \in \mathfrak{g}^*$ este define naturalmente uma forma bilinear antisimétrica $B_f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, dada por

$$B_f(x, y) = f([x, y]) \quad x, y \in \mathfrak{g}$$

Por definição radical de B_f é dado por $\{y \in \mathfrak{g} : B_f(x, y) = 0,\ x \in \mathfrak{g}\}$, e, portanto, $\mathbf{r}_f$ é o radical de B_f.

É conhecida a existência de subespaços *isotrópicos* maximais para uma forma bilinear B, isto é espaços maximais V tais que para todo o $v_1, v_2 \in V, B(v_1, v_2) = 0$, e todos estes espaços têm a mesma dimensão. Assim dado $f \in \mathfrak{g}^*$ existe uma subalgebra máximal isotrópica para B_f.

Definição 2 (Polarizações)**.** *Uma subálgebra polarizadora para $f \in \mathfrak{g}^*$ é uma subálgebra de Lie $\mathfrak{m}_f$ que é um subespaço isotrópica maximal. Definimos ainda o grupo associado a $\mathfrak{m}_f$ como sendo $M_f = \exp(\mathfrak{m}_f)$.*

Na teoria da representação de grupos nilpotentes, conexos e simplesmente conexos, as subálgebras polarizadoras e os seus grupos associados desempenham um papel fundamental, pois as representações irredutíveis são representações induzidas por certas representações associadas aos grupos associados, como veremos no próximo capítulo.

No entanto é preciso assegurar que subálgebras polarizadoras existem de facto. O próximo resultado estabelece isso mesmo. A demonstração será feita por indução, sendo a primeira instância neste trabalho de uma aplicação do lema de Kirillov.

Teorema 1.2.6. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente e $f \in \mathfrak{g}^*$. Então existe uma subálgebra polarizadora para f.*

Demonstração. A prova será feita por indução em $n = dim(\mathfrak{g})$.

Se $n = 1$, a álgebra é abeliana e portanto $\mathbf{r}_f = \mathfrak{m}_f$. Consideremos agora $\mathfrak{g}$ de dimensão $n+1$ e seja $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Ora, se $dim(\mathfrak{z}) \geq 2$, podemos escolher um subespaço não nulo $\mathfrak{z}_0 \subseteq \mathfrak{z}$ tal que $f(\mathfrak{z}_0) = 0$.

Assim considere-se $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$ e P a projecção canónica de $\mathfrak{g}$ para $\tilde{\mathfrak{g}}$ e seja$\tilde{f} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f} \circ P = f$. Não é difícil ver que $\mathbf{r}_{\tilde{f}} = P(\mathbf{r}_f)$ e que, se $\tilde{\mathfrak{m}}_{\tilde{f}}$ for uma subálgebra polarizadora de $\tilde{f}$, que existe por hipótese de indução, então $P^{-1}(\tilde{\mathfrak{m}}_{\tilde{f}})$ é polarizadora de f.

Assim podemos concentrar-nos no caso em que dimensão de $\mathfrak{z}$ é um e $f(\mathfrak{z})$ é diferente de zero. Tome-se então $x, y, z, \mathfrak{g}_0$ como no lema de Kirillov e seja f_0 a restrição de f a $\mathfrak{g}_0$.

Ora, por hipótese de indução, existe uma subálgebra polarizadora $\mathfrak{m}_{f_0} = \mathfrak{m}$ em $\mathfrak{g}_0$ para f_0. Vejamos que $\mathfrak{m}$ é ainda polarizadora para f.

Note-se que $B_f([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = B_{f_0}([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = 0$. Tome-se $w = \alpha x + w_0$, com $w_0 \in \mathfrak{g}_0$ e α diferente de zero. Então $B_f([w, y]) = l(\alpha z) \neq 0$, e portanto $\mathbf{r}_f \subseteq \mathfrak{g}_0$.

O raciocínio anterior também mostra que $y \notin \mathbf{r}_f$. Mas, sendo y central em $\mathfrak{g}_0$ tem-se que $y \in \mathbf{r}_{f_0}$, e ,portanto, concluímos que $\mathbf{r}_f \subset \mathbf{r}_{f_0}$, sendo a inclusão estrita.

Assim, temos que $dim(\mathfrak{g}/\mathbf{r}_f) \geq \dim(\mathfrak{g}_0/\mathbf{r}_{f_0}) + 2$. Naturalmente temos ainda que $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{m}) = \dim(\mathfrak{g}_0/m) + 1$. Mas para qualquer álgebra isotrópica $\mathfrak{m}'$ de f, temos que $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{m}') \geq \frac{1}{2}\dim(\mathfrak{g}/\mathbf{r}_f)$.

Deste modo concluímos as desigualdades seguintes

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dim(\mathfrak{g}/\mathbf{r}_f) \leq \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{m}) = &\ 1 + \dim(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{m}) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\dim(\mathfrak{g}_0/\mathbf{r}_{f_0}) \leq \frac{1}{2}\dim(\mathfrak{g}/\mathbf{r}_f)\end{aligned}$$

Portanto $\mathfrak{m}$ tem a dimensão de qualquer subespaço maximal isotrópico, logo é uma subálgebra polarizadora para f. □

Façamos aqui um reparo em relação à prova anterior. Essencialmente, reduzimos a prova ao caso em que $\mathfrak{g}$ tem centro unidimensional por meio do quociente por $\mathfrak{z}_0$ e hipótese de indução. Este artifício será usado de forma sistemática no próximo capitulo, mostrando como ,não só a indução, mas também o conhecimento das álgebras de Lie nilpotentes de centro unidimensional são ferramentas fundamentais.

Garantida a existência de subálgebras polarizadoras enunciemos um resultado que relaciona radicais, subálgebras polarizadoras e subálgebras de codimensão um.

Proposição 1.2.7. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra nilpotente e $\mathfrak{g}_0$ uma subálgebra de codimensão um. Seja ainda $f \in \mathfrak{g}^*$ e denotemos por f_0 a restrição de f a $\mathfrak{g}_0$, existem assim duas situações disjuntas:*

- *: **Caso 1:** São equivalentes:*
  1. *$\boldsymbol{r}_f \subseteq \mathfrak{g}_0$;*
  2. *$\boldsymbol{r}_f \subseteq \boldsymbol{r}_{f_0}$;*
  3. *$\boldsymbol{r}_f$ tem codimensão um em $\boldsymbol{r}_{f_0}$;*

  Neste caso, qualquer subálgebra polarizadora de f_0 é uma subálgebra polarizadora de f.

- ***Caso 2:** São equivalentes*
  1. *$\boldsymbol{r}_f$ não está contido em $\mathfrak{g}_0$;*
  2. *$\boldsymbol{r}_{f_0 p} \subseteq \boldsymbol{r}_f$;*
  3. *$\boldsymbol{r}_{f_0}$ tem cdimensão um em $\boldsymbol{r}_f$;*

  Neste caso se $\mathfrak{m}$ for uma subálgebra polarizadora de f então $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_0$ é uma polarização de f_0, $\mathfrak{m}_0$ tem codimensão um em $\mathfrak{m} = \boldsymbol{r}_f + \mathfrak{m}_0$.

A prova pode ser consultada em [24], proposição 1.3.4. Trata-se apenas de algumas simples manipulações algébricas e algumas considerações relativas a dimensões.

Ora, garantimos a existência de subálgebras polarizadoras para $f \in \mathfrak{g}^*$, no entanto podem existir várias, e na prática é extremamente útil conseguir determinar subálgebras polarizadoras. Existem resultados que nos permitem obter uma polarização de um modo canónico, nomeadamente o método de Vergne [24]. No entanto, não descrevemos aqui nenhum desses resultados, pois tal não é de nosso interesse; no que diz respeito a este trabalho a existência de pelo menos uma é suficiente.

1.2.2 Geometria das órbitas coadjuntas

Façamos algumas considerações sobre a geometria das órbitas coadjuntas. Seja $f \in \mathfrak{g}^*$, denotemos por $\mathcal{O}_f$ a órbita coadjunta de f, e seja ainda $\phi : G \to \mathfrak{g}^*$ dado por $\phi(g) = (\mathrm{Ad}^* g)f$, para todo o $g \in G$. Uma vez que, para todo o $g \in G$, $\mathrm{rank}(d\phi)_g = \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathbf{r}_f)$, este é portanto constante. Assim, concluímos que a órbita $\mathcal{O}_f$ é uma variedade.

Assim, se munirmos o espaço homogéneo $G/\mathscr{R}_f$ com a estrutura natural de variedade, esta vem difeomorfa a $\mathcal{O}_f$, e portanto conseguimos identificar de modo natural lo espaço tangente $T_f(\mathcal{O}_f)$ com $\mathfrak{g}/\mathbf{r}_f$. No entanto mais do que uma variedade, as órbitas são variedades simpléticas, isto é, é uma variedade equipada com uma duas-forma fechada e não degenerada. Vejamos como.

Seja B_f a forma bilinear antisimétrica definida por $B_f(x, y) = f([x, y])$, para todos os $x, y \in \mathfrak{g}$. Ora, cálculos elementares mostram que o radical de B_f é $\mathbf{r}_f$. Além disso, B_f é invariante para a acção de $\mathscr{R}_f$, isto é, para todos os $g \in \mathscr{R}_f$

$$\begin{aligned} B_f(\mathrm{Ad}(g)x, \mathrm{Ad}(g)y) &= f(\mathrm{Ad}(g)[x, y]) \\ &= f([x, y]) = B_f(x, y) \end{aligned}$$

Definição 3 (Forma de Kirillov)**.** *Para qualquer $f' \in \mathcal{O}_f$ definimos a forma de Kirillov como*

$$B_{\mathcal{O}_f}(f')(ad(x)f', ad(y)f') = f'([x, y])$$

A prova de que de facto a forma de Kirillov está bem definida e é não degenerada resulta do que foi visto acima. A prova de que é fechada e muitos outros detalhes podem ser encontrados em [7, 8].

Como corolário vem que as órbitas coadjuntas têm dimensão par.

A geometria da órbitas coadjuntas revelam-se de grande importância no estudo de representações associadas a problemas da física, pois a geometria simplectica tem ligações profundas com a mecânica Hamiltoniana e sistemas dinamicos associados a esta mecanica. Para mais detalhes uma vez mais remetemos o leitor para [7] e ainda [31]

1.3 Grupos álgebra

Nesta secção vamos finalmente definir os grupos álgebra. A sua definição é completamente análoga à do caso finito, e ,tal como nesse caso, esta classe de grupos generaliza, em certa medida, o grupo unitriangular.

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra associativa sobre $\mathbb{R}$, de dimensão finita e nilpotente, isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todos $x_1, ..., x_n \in \mathcal{J}$ se tem $x_1 ... x_n = 0$.

Nestas condições podemos definir uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathcal{J}$, bastando para isso considerar o parêntesis de Lie como o comutador,isto é:

$$[x,y] := xy - yx \quad x,y \in \mathcal{J}$$

Uma vez que $\mathcal{J}$ é nilpotente, não é difícil ver que $\mathcal{J}$ é álgebra de Lie nilpotente. Denotemos por $\mathfrak{j}$ a álgebra de Lie $\mathcal{J}$.

Definição 4 (Grupo álgebra)**.** *Seja* $\mathfrak{j}$ *uma álgebra real associativa de dimensão finita. Definimos o seu grupo álgebra associado como sendo* $G = 1 + \mathfrak{j}$ *onde:*

$$(1+x)(1+y) = 1 + x + y + xy \quad x,y \in \mathfrak{j}$$

Dada a definição, é necessário provar que um grupo álgebra é de facto um grupo, isto é, garantir a existência de inverso. Ora, seja $G = 1 + \mathfrak{j}$ tal que $\mathfrak{j}$ é k-nilpotente tome-se $1 + x \in G$; cálculos elementares mostram que $1 + \sum\limits_{n=0}^{k} (-x)^n$ é o inverso de $1 + x$.

Assim dado um grupo álgebra $G = 1 + \mathfrak{j}$ este herda a estrutura diferencial de $\mathfrak{j}$, onde o produto e soma são suaves, de modo que G é um grupo de Lie, conexo e simplesmente conexo. Deste modo, é conveniente ter o conhecimento da sua álgebra de Lie.

Observação 1 (Alguma notação)**.** *Seja G um grupo álgebra, se $g = 1 + x \in G$, denotamos por $\overline{x}$ o único elemento em $\mathfrak{g}$ tal que $g^{-1} = 1 + \overline{x}$.*

Á semelhança do grupo unitriangular, defina-se a exponencial de $x \in \mathfrak{j}$ com sendo:

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Uma vez mais, sendo $\mathcal{J}$ nilpotente, esta soma é finita e além disso $\exp(\mathfrak{j}) \subseteq G$. Vejamos a natureza da álgebra de Lie de G e a relação profunda de G com $\mathfrak{j}$.

Proposição 1.3.1. *Seja $G = 1 + \mathfrak{j}$ um grupo álgebra. Então a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G é igual a $\mathfrak{j}$.*

Demonstração. Por 1.2.2, temos que G é difeomorfo a $\mathfrak{g}$. Por outro lado, pela definição de um grupo álgebra, G é difeomorfo a $\mathfrak{j}$ (por meio da correspondência $x \mapsto 1 + x$). Assim, $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{j}$ são difeomorfos, e ,portanto, têm a mesma dimensão.

Tomemos agora $x \in \mathfrak{j}$ e considere-se a curva integral $\alpha : [0,1] \to G$ tal que $\alpha(t) = 1 + tx$. Derivando a curva α no ponto zero concluímos que x está em $\mathfrak{g}$.

Da arbitrariedade de x,vem que $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{g}$. Uma vez que estas álgebras de Lie têm a mesma dimensão concluímos que são iguais. □

Façamos agora alguns reparos. Considere-se $G = 1 + \mathfrak{j}$ um grupo álgebra, por 1.2.5 existe um único grupo de Lie conexo e simplesmente conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{j}$. Pelo resultado anterior a álgebra de Lie de G é $\mathfrak{j}$. Assim G vem nilpotente e podemos denotar G por $1 + \mathfrak{g}$.

Exemplo 3 (Grupo álgebra U_n)**.** *Seja U_n o grupo unitriangular $n \times n$, trata-se um grupo álgebra. Vimos que a sua álgebra de Lie é $\mathfrak{u}_n$, e se 1 denotar a matriz identidade de tipo $n \times n$, então $U_n = 1 + \mathfrak{u}_n$. A estrutura diferencial é claramente a que advém da de $\mathfrak{u}_n$.*

É neste sentido que os grupos álgebra generalizam o grupo unitriangular.

Ora, sendo $G = 1 + \mathfrak{g}$ um grupo álgebra, este é nilpotente, conexo e simplesmente conexo, logo por 1.2.2 a exponencial é um difeomorfismo. Temos assim dois difeomorfismos relevantes:

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

$$\phi : \mathfrak{g} \to G$$

onde $\phi(a) = 1 + a$. Além disso qualquer elemento de G escreve-se como série exponencial. Para os grupos álgebra a aplicação ϕ será central na teoria de super-representações, pois faz a ligação de G com a sua álgebra de Lie de um modo não só mais expedito, como mais algébrico.

Teoria da representação

2

Estamos especialmente interessados nas representações de grupos de Lie. Sendo estes grupos localmente compactos, apresentaremos as definições e resultados elementares da teoria da representação para esta classe de grupos, começando por referir aspectos elementares da teoria da medida em grupos topológicos.

Referências clássicas são, por exemplo, [7, 12, 16].

2.1 Medida em grupos topológicos

Seja G um grupo localmente compacto. Uma medida μ positiva e regular em G diz-se *invariante à direita*, ou medida de Haar à direita, se para todo $f \in C_c^0(G)$ e para todo $h \in G$ se tem

$$\int_G f(gh)d\mu(g) = \int_G f(g)d\mu(g)$$

Analogamente se define uma medida invariante à esquerda, ou medida de Haar à esquerda.

Comecemos por construir uma medida invariante. Seja G um grupo localmente compacto, Hausdorff e com base numerável, este vem naturalmente equipado com uma sigma-álgebra, a dos borélianos, portanto podemos fazer uso do seguinte resultado:

Teorema 2.1.1 (Riesz-Markov). *Seja X um espaço topológico localmente compacto, Hausdorff e com base numerável, então para todo o funcional linear*

$\phi : C_c^0(X) \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ *existe uma única medida* μ*, definida na sigma-álgebra dos borélianos de* X *tal que*

$$\phi(f) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

Ora, Haar garante a existência de um funcional linear $\mu_0 : C_c^0(G) \to \mathbb{R}^+$ invariante à esquerda, isto é, dado $g \in G$, se R_g denotar a translação direita por g, temos que

$$\mu_0(f \circ R_g) = \mu_0(f) \qquad \forall g \in G$$

Assim, pelo teorema de Reisz-Markov obtemos uma medida μ em G, esta vem uma medida de Haar à direita.

Um resultado clássico devido a Weyl garante que a menos de múltiplo escalar existe uma única medida de Haar (à esquerda ou à direita) para um grupo G se e só se este é localmente compacto. Se as medidas à esquerda e à direita de Haar coincidirem dizemos que o grupo é *unimodular*.

Pela unicidade da medida de Haar, podemos definir a função modular de um grupo.

Definição 5. *Seja* μ *uma medida de Haar à direita. Definimos a função modular* Δ_G *de* G *como sendo a única função de* G *para* $\mathbb{R}$ *tal que para qualquer subconjunto* $S \subseteq G$*,*

$$\mu(g^{-1}S) = \Delta_G(g)\mu(S)$$

Assim, pela definição, um grupo é unimodular se e só se a função modular for constantemente igual a um. O próximo resultado é o que permite, do ponto de vista da teoria da medida, definir a representação induzida.

Proposição 2.1.2. *Seja* H *um subgrupo fechado (não necessariamente normal) de* G*. Então para a acção natural à direita, existe uma medida de Haar no quociente* $H \setminus G$ *se e só se* $\Delta_G \restriction_H = \Delta_H$*.*

Se G um grupo de Lie nilpotente e H um seu subgrupo fechado, este também é nilpotente e, portanto, são ambos unimodolares. Logo pela proposição acima, o quociente $H \setminus G$ admite uma medida de Haar à direita, uma vez que temos

$$\Delta_G \equiv 1 \equiv \Delta_H \;\Rightarrow\; \Delta_g \restriction_H = \Delta_H$$

2.2 Representações unitárias

Existem vários tipos de representações de grupos topológicos, no entanto uma das classes mais abrangentes e mais interessante são as representações unitárias. Assim, e uma vez que nos focaremos apenas em representações deste tipo, apresentemos as noções gerais.

Definição 6 (Representação unitária). *Seja G um grupo localmente compacto, entende-se por representação unitária de G um par $(\pi, \mathscr{H})$, onde $\mathscr{H}$ é um espaço de Hilbert e π é um homomorfismo de G para o grupo $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ dos operadores unitários de $\mathscr{H}$, contínuo para a topologia forte de operadores.*

Exemplo 4 (Representação regular direita). *Dado G um grupo localmente compacto, seja μ a sua medida de Haar à direita e $L^2(G, \mu)$ o conjunto das funções f de G para $\mathbb{C}$ tais que*

$$(\int_G |f|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}} \leq \infty$$

Então define-se a representação regular à direita $(\rho, L^2(G, \mu))$ do seguinte modo:

$$\rho(g_1)f(g_2) = f(g_2 g_1) \quad f \in L^2(G, \mu), g_1, g_2 \in G$$

No que segue, G irá denotar um grupo localmente compacto, e iremos referir-nos às representações unitárias simplesmente por representações, uma vez que não será considerado outro tipo de representações. Além disso, denotaremos apenas por π a representação $(\pi, \mathscr{H})$ e, sempre que necessário, iremos indexar o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ com o morfismo π, isto é, $\mathscr{H}_\pi$. Por vezes também será usada a notação π_g para denotar o operador unitário $\pi(g)$ para $g \in G$.

Dada um representação π de G, a dimensão de $\mathscr{H}_\pi$ é chamada a dimensão da representação. Contrariamente às representações de grupos compactos, onde toda a representação irredutível é de dimensão finita, maioritariamente as representações irredutíveis dos grupos localmente compactos têm dimensão infinita.

Proposição 2.2.1. *Seja π uma representação (unitária) de G. Então, são equivalentes:*

1. *π é fortemente contínua;*
2. *π é fracamente contínua;*
3. *Para todo o $u \in \mathscr{H}_\pi$, a aplicação dada por $g \mapsto (\pi(g)u, u)$ é contínua na identidade. Denotamos por $(.,.)$ o produto interno de $\mathscr{H}_\pi$.*

Demonstração. As implicações $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ são triviais, pelo que provaremos $3 \Rightarrow 1$.

Para $u \in \mathscr{H}_\pi, g, h \in G$ temos

$$\begin{aligned} ||\pi(g)u - \pi(h)u|| &= 2(u,u) - 2\mathrm{Re}(\pi(g)u, \pi(h)u) \\ &\leq 2|(u,u) - (\pi(g)u, \pi(h)u)| \\ &\leq 2|(u,u) - (\pi(h^{-1}g)u, u)| \end{aligned}$$

Assim a implicação $3 \Rightarrow 1$ segue desta desigualdade. □

Dadas duas representações π_2 e π_2 de G, é necessário relacioná-las. Tal é conseguido com os *operadores de entrelaçamento*:

Definição 7 (Operadores de entrelaçamento). *Sejam π_1, π_2 duas representações de G. Dizemos que $A : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ é um operador de entrelaçamento se A for um operador linear, unitário e contínuo e comutar com a acção do grupo, isto é:*

$$A\pi_1(g) = \pi_2(g)A \quad g \in G$$

Deste modo, podemos definir a categoria $\mathscr{R}(G)$ onde os objectos são as representações de G e os morfismos os operadores de entrelaçamento. Denotaremos por $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ o conjunto dos operadores de enterlaçamento entre duas representações π_1, π_2. Assim podemos considerar os objectos isomorfos nesta categoria, dizendo que estes são *unitariamente equivalentes*, ou simplesmente equivalentes.

O conceito de equivalência pode ser reformulado do seguinte modo:

Definição 8. *Dadas duas representações π_1, π_2 de G dizem-se equivalentes se existir um operador invertível em $Hom(\pi_1, \pi_2)$. Denotamos a equivalência entre estas duas representações por $\pi_1 \simeq \pi_2$.*

A teoria da representação lida apenas com classes de equivalências de representações, uma vez que, para efeitos práticos, representações equivalentes são a mesma.

Considere-se agora uma representação π de G e seja $\mathscr{H}_1$ um subespaço fechado de $\mathscr{H}_\pi$. Dizemos que $\mathscr{H}_1$ é G-invariante se para todo $g \in G$, e para todo $x \in \mathscr{H}_1$, se tem $\pi(g)x \in \mathscr{H}_1$.

Assim, se $\mathscr{H}_1$ for um subespaço G-invariante de $\mathscr{H}_\pi$, a restrição π_1 de π a $\mathscr{H}_1$ define uma representação de G em $\mathscr{H}_1$. Dizemos que $(\pi_1, \mathscr{H}_1)$ é uma *subrepresentação* de π, e escrevemos $\pi_1 \leq \pi$.

Por outro lado, se $(\pi, \mathscr{H})$ for uma representação de G e $(\pi_1, \mathscr{H}_1)$ uma sua subrepresentação, fica definida uma representação π_2 em $\mathscr{H}_2 = \mathscr{H}/\mathscr{H}_1$ de um modo natural. Além, disso $\mathscr{H}$ é naturalmente isomorfo a $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$, o que sugere a notação $\pi = \pi_1 + \pi_2$.

Note-se que qualquer representação admite duas subrepresentações triviais, sendo elas a própria representação e a representação $(\mathbf{1}, \mathbb{C})$ em que todos os elementos de G são aplicados na identidade.

Definição 9 (Representação irredutível)**.** *Uma representação π de G diz-se irredutível se não admitir subrepresentações não triviais.*

A irredutibilidade de uma representação π tem ligações profundas com a estrutura de $\mathrm{Hom}(\pi, \pi)$, como mostra o lema de Schur:

Lema 2.2.2 (Lema de Schur)**.** *Sejam π_1, π_2 duas representações irredutíveis de G. Então todo o elemento não nulo de $Hom(\pi_1, \pi_2)$ é invertível. Em particular, π é irredutível se e só se $Hom(\pi, \pi) = \mathbb{C}I_{\mathscr{H}_\pi}$*

Demonstração. Seja $A \in \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$. A demonstração resulta facilmente atendendo que tanto $\ker(A) \subseteq \mathscr{H}_1$ e $\mathrm{img}(A) \subseteq \mathscr{H}_2$ são subespaços fechados e G-invariantes. □

A importância das representações irredutíveis advêm do facto de, analogamente ao caso dos grupos finitos, qualquer representação se decompor em representações irredutíveis. Contrariamente ao caso finito, uma vez que iremos lidar com representações infinitas, esta decomposição não será feita como uma soma, e portanto é necessário introduzir as ferramentas necessárias, nomeadamente, o *integral directo de espaços de Hilbert*.

No entanto, vejamos o que acontece quando a representação é de dimensão finita.

Proposição 2.2.3. *Seja π uma representação de G de dimensão finita. Então π é soma de representações irredutíveis.*

Demonstração. Seja $(\pi, \mathscr{H})$ uma representação de G de dimensão finita. Esta ou é irredutível, ou não. Se for irredutível não há nada a demonstrar; caso contrário existe um subespaço $\mathscr{H}_1$ G-invariante de $\mathscr{H}$, e portanto $\mathscr{H}$ vem isomorfo a $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}/\mathscr{H}_1$ e $\pi = \pi_1 + \pi_2$, sendo π_1 a restrição de π a $\mathscr{H}_1$ e π_2 a representação induzida em $\mathscr{H}/\mathscr{H}_1$.

Faz-se o mesmo raciocínio para π_1 e π_2, e prossegue-se indutivamente. Uma vez que $\mathscr{H}$ tem dimensão finita este processo termina, o que prova o desejado. □

Um conceito também importante é o das representações que não têm qualquer relação entre si, em termo de operadores de entrelaçamentos.

Definição 10 (Representações disjuntas)**.** *Se π_1 e π_2 forem duas representações de G, estas dizem-se disjuntas se $Hom(\pi_1, \pi_2) = 0$.*

Prova-se que duas representações, π_1, π_2 são disjuntas se nenhuma subrepresentação, não trivial, de π_1 for equivalente a uma subrepresentação não trivial de π_2. Assim, temos em particular que, duas representações irredutíveis são disjuntas.

Este conceito tem importância quando se trabalha com *quase-equivalência.* Muitas vezes é difícil conhecer as representações irredutíveis, e por isso introduz-se o conceito de quase-equivalência.

Definição 11 (Quase-equivalentes)**.** *Se π_1 e π_2 forem duas representações de G, estas dizem-se quase-equivalentes se uma das duas condições equivalentes seguintes for satisfeita:*

- *toda a subrepresentação não trivial de π_1 não é disjunta de π_2; toda a subrepresentação não trivial de π_2 não é disjunta de π_1.*

- *existem múltiplos de π_1 e de π_2 que são equivalentes.*

A quase-equivalência foi inicialmente introduzida para as representações de álgebras C^*, havendo uma adaptação para as representações de grupos localmente compactos (uma vez que qualquer representação de um grupo localmente compacto induz uma representação de uma certa álgebra C^*).

Ao fazer o análogo das representações equivalentes com as quase-equivalentes, as representações disjuntas tomam o papel das irredutíveis.

Um problema importante da teoria da representação é a descrição da decomposição da representação regular. Em geral pouco se sabe sobre a decomposição em irredutíveis. No entanto a menos de quase-equivalência já é possível conhecer a representação regular. O conceito desempenha ainda um papel fulcral no estudo de representações factor (ver por exemplo [12] para uma discussão profunda da quase-equivalência).

Em particular, se duas representações de dimensão finita, ou tiverem no máximo multiplicidade numerável, forem quase-equivalentes, isto significa que ambas têm os mesmos constituintes irredutíveis, não necessariamente com a mesma multiplicidade.

2.3 Integral directo de Espaços de Hilbert e decomposição de representações

O integral directo, ou soma contínua de espaços de Hilbert é uma generalização da noção de soma directa, introduzida por Von-Neumann no estudo daquilo que hoje chamamos de álgebras de Von-Neumann.

Não vamos entrar em demasiados detalhes no que diz respeito à teoria de integrais directos; apresentaremos apenas as definições necessárias para decompor representações em representações irredutíveis. Para mais detalhes, recomendamos [12].

Seja (X, μ) um espaço de Borel, onde assumimos que μ é uma medida σ-finita. Admitamos que é dada uma família de espaços de Hilbert indexada em X, isto é, para cada $x \in X$ é dado um espaço de Hilbert $\mathscr{H}_x$. Seja ainda $\mathscr{H}' = \prod\limits_{x \in X} \mathscr{H}_x$.

Tome-se uma família numerável Γ de funções de X para $\mathscr{H}'$ tais que:

- dado $f \in \Gamma$, $f(x) \in \mathscr{H}_x$, para todo o $x \in X$;
- Para todos $f_1,\ f_2 \in \Gamma$, a função $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ é mensurável para a medida μ;
- Para quase todos os $x \in X$, os elementos $f(x)$, para $f \in \Gamma$ geram $\mathscr{H}_x$;

Identifiquemos as funções que são iguais quase em toda a parte, abreviado p.p (do francên *presque partout*) em relação a μ e defina-se

$$\Gamma^o = \{f : X \to \mathscr{H}' : \int\limits_X (f(x), f'(x)) d\mu < \infty,\ \forall f' \in \Gamma\}$$

A Γ^o chamamos *família de funções mensuráveis de $\mathscr{H}'$*, introduzimos o produto escalar

$$(f, f') = \int\limits_X (f(x), f'(x))d\mu$$

.

Definição 12 (Integral directo de espaços de Hilbert). *Sejam* $(X, \mu), \mathscr{H}'$ *e* Γ^o *como descritos acima. Define-se o integral directo da família* $\{\mathscr{H}_x\}_{x\in X}$ *como sendo*

$$\int\limits_X^{\oplus} \mathscr{H}_x d\mu := \{f \in \Gamma^o : ||f||_{L_2} < \infty\}$$

Não é difícil ver que, nestas condições, $\mathscr{H} = \int\limits_X^{\oplus} \mathscr{H}_x d\mu$ é de facto um espaço de Hilbert.

Exemplo 5. *Se* X *for numerável e* μ *uma medida discreta, então* $\int\limits_X^{\oplus} \mathscr{H}_x d\mu \simeq \bigoplus\limits_{x\in X} \mathscr{H}_x$

Se A um operador linear de $\mathscr{H}$, este diz-se *decomponível* se existir uma família de operadores lineares $\{A_x\}_{x\in X}$, cada um em $\mathscr{H}_x$ respectivamente, tais que para todo $f \in \mathscr{H}$

$$(Af)(x) = A_(xf(x)) \text{ p.p sobre } X$$

Enunciemos assim o resultado sobre a decomposição de representações.

Teorema 2.3.1 (Gelfand-Raïkov). *Sejam* G *um grupo localmente compacto e* $(\pi, \mathscr{H})$ *uma representação de* G*. Então existe um espaço de Borel* (X, μ) *em que* μ *é uma medida* σ*-finita tal que* π *se decompõe em integral directo de representações irredutíveis*

$$\pi \simeq \int\limits_X^{\oplus} \pi_x d\mu$$

Esta decomposição é única a menos de equivalência.

A demonstração não é feita aqui, sendo [7, 26] indicado para consulta da prova. A prova é morosa e extremamente técnica, envolvendo teoria de álgebras C^*, fugindo assim o escópio deste trabalho. A ideia é recorrer à álgebra C^* do grupo.

Pelo teorema de Gelfand-Neimark (ver [7]) podemos associar a $L^2(G, \mu)$, onde μ é uma medida de Haar invariante à esquerda, uma álgebra C^*, denotada por $C^*(G)$ e designada por *álgebra do grupo*.

De seguida, à representação π de G associamos uma representação de $C^*(G)$ e, recorrendo à maquinaria disponível da teoria das álgebras C^*, prova-se que existe uma decomposição, é preservada quando voltamos a associar uma representação de G.

Note-se que, tendo em conta o exemplo anterior, este resultado abrange também as representações de dimensão finita. Tendo assim reduzido, em termos teóricos, o estudo de representações ao estudo de representações irredutíveis, introduzimos agora o *grupo dual*, denotado por $\hat{G}$, que não é mais que o conjunto das classes de equivalência das representações irredutíveis do grupo G.

Assim, um dos problemas base da teoria da representação é conhecer $\hat{G}$. Existem várias aplicações do grupo dual no estudo da análise harmónica; tal é feito introduzindo uma topologia em $\hat{G}$.

Comecemos por considerar o conjunto $\tilde{G}$ das classes de equivalência de todas as representações de G, não só das irredutíveis. Dado uma representação $(\pi, \mathscr{H})$ de G, para definir uma vizinhança de π necessitamos de:

- um compacto $K \subseteq G$;
- $\epsilon \in \mathbb{R}^+$;
- uma colecção finita $X = \{x_1, ...x_n\} \subseteq \mathscr{H}$;

Definimos a vizinhança $U_{K,\epsilon,X}(\pi)$ como sendo o conjunto de todas as representações $(\pi', \mathscr{H}')$ para as quais existe uma família finita$Y = \{y_1, ..., y_n\} \subseteq \mathscr{H}'$ tal que

$$|(\pi(g)x_i, x_j) - (\pi'(g)y_i, y_j)| < \epsilon \quad \forall g \in K$$

Deste modo, equipamos $\hat{G}$ com a topologia induzida.

Um ultimo reparo antes de prosseguir: de modo a descrever uma representação, de acordo com este resultado, é suficiente determinar o conjunto dos representares das classses de equivalência dos constituintes irredutíveis, o conjunto (X, μ) e as multiplicidades de cada constituinte.

Designamos por *espectro de uma representação* o conjunto dos constituintes e o par (X, μ).

2.4 Indução de representações

Tal como nos grupos finitos a indução de representações apresenta-se como uma ferramenta fundamental na construção de representações novas. Provaremos mais tarde que em relação aos grupos de Lie nilpotentes, conexos e simplesmente conexos toda a representação irredutível é obtida por indução de uma representação de dimensão finita (de facto de dimensão 1).

Essencialmente, a indução de representações tal como as suas propriedades fundamentais foram introduzidas por G. W. Mackey (ver [16]). Para uma motivação natural do processo de indução, remetemos para [10].

Façamos o reparo de que a indução de representações no geral é muito subtil, envolvendo complicações do ponto de vista da teoria de medida. No entanto, lidaremos com grupos nilpotentes que são grupos unimodulares, o que torna a definição e manejamento da representação induzida significativamente mais simples.

Dada uma representação $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ de H, define-se o *espaço induzido*

$$\mathscr{H}_\pi^G = \{f \in L^2(G, \mathscr{H}_\pi, \mu) : f(hg) = \pi(h)f(g),\ \forall h, \in H, \forall g \in G\}$$

onde μ é uma medida de Haar à direita para $H \setminus G$. Se introduzirmos o produto escalar

$$(f, f') = \int_{H\setminus G} (f(g), f'(g))d\mu(g)$$

em $\mathscr{H}_\pi^G$, então este vem um espaço de Hilbert. Define-se assim a noção de representação induzida.

Definição 13 (Representação induzida)**.** *Sejam H um subgrupo fechado de G e $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ uma sua representação. Define-se a representação induzida de π como sendo $(\pi^G, \mathscr{H}_\pi^G)$ em que*

$$\pi^G(g_1)f(g_2) = f(g_2g_1) \quad f \in \mathscr{H}_\pi^G,\ g_1, g_2 \in G$$

É ainda necessário verificar que a definição é legítima, isto é, que é de facto uma representação. Tal é facilmente verificado, atendendo que os elementos de contínuos de $\mathscr{H}_\pi^G$, cuja imagem do suporte é compacta, são densos em $\mathscr{H}_\pi^G$.

Exemplo 6. *Se ρ a representação regular à direita, tem-se que $\rho = \boldsymbol{1}^G$, onde $\boldsymbol{1}$ é a representação trivial do subgrupo trivial.*

Estaremos interessados em induzir representações da forma $(\pi, \mathbb{C})$, de modo que o espaço $\mathscr{H}_\pi^G$ é um subespaço de $L^2(G, \mathbb{C}, \mu) = L^2(G, \mu)$.

Finalizamos com o resultado que permite induzir por etapas. A demonstração original deve-se a Mackey, como já foi referido. No entanto, recomendamos [25], uma vez que este segue uma notação e linguagem mais recente e acessível.

Proposição 2.4.1 (Indução por etapas)**.** *Sejam $H \leq K \leq G$ subgrupos fechados e π uma representação de H, então*

$$(\pi^K)^G \simeq \pi^G$$

2.5 Representações de álgebras de Lie

Os grupos de Lie, para além de estrutura topológica, têm uma estrutura adicional de variedade, o que permite recorrer à álgebra de Lie para o estudo do grupo.

Ora, como foi referido, no caso dos grupos de Lie conexos e simplesmente conexos, a ligação entre o grupo e a álgebra de Lie é muito forte: são difeomorfos. Assim, neste caso, é possível recorrer ás representações da álgebra de Lie para estudar as representações do grupo, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 2.5.1. *Sejam G um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo e $(\pi, \mathscr{H})$ uma sua representação. Tem-se então:*

- *O subespaço $\mathscr{H}^\infty$, dos vectores suaves, é denso em $\mathscr{H}$ e invariante para $\pi(g)$, com $g \in G$;*

- *A representação π fica completamente determinada pela representação π_* de $\mathfrak{g}$ em $\mathscr{H}^\infty$, onde para todo $x \in \mathfrak{g}$,*

$$\pi_*(x) = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tx))\bigg|_{t=0}$$

- *para todo* $X \in \mathscr{H}^\infty, \pi(\exp tx)X = e^{-t\pi_*(x)}X$ *onde o termo da direita é a solução da equação diferencial* $X'(t) = i\pi_*(x)X(t)$, *com* $X(0) = X$

A demonstração pode ser encontrada em [8].

Esta forte ligação entre as representações do grupo e da sua álgebra de Lie foi ferramenta essencial no estudo feito por Dixmier (tal como o uso da teoria das álgebras C^*). Parte do trabalho de Dixmier, no que diz respeito aos grupos de Lie nilpotentes, conexos e simplesmente conexos, é frequentemente desconhecido. Tal deve-se ao método das órbitas de Kirillov. A diferença nas duas abordagens advém dos ângulos adoptados para atacar os problemas, tendo Kirillov uma abordagem mais geométrica.

Ainda que esta abordagem não seja seguida no que segue é mencionada pelo simples facto de ser uma ferramenta poderosa nalguns aspectos.

2.6 Teoria de Kirillov

Em 1962 é publicado o artigo seminal de Kirillov, [10]. Neste artigo é introduzido aquilo que hoje é conhecido como o método das órbitas. Como foi já referido, Kirillov conseguiu parametrizar e descrever as representações irredutíveis para grupos de Lie nilpotentes, conexos e simplesmente conexos, graças a este método.

A força e beleza desta abordagem levou a que se estendesse a outras classes de grupos, alguns nem sendo grupos de Lie, obtendo bons resultados. Remetemos o leitor interessado para [8].

No que segue apresentaremos os resultados fundamentais do método das órbitas. Fixemos alguma notação: G denotará sempre um grupo de Lie nilpotente, conexo e simplesmente conexo, $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie e $\mathfrak{g}^*$ o dual de $\mathfrak{g}$, além disso $\mathfrak{z}$ será o centro de $\mathfrak{g}$ e $Z = \exp(\mathfrak{z})$.

Definição 14 (Representações de Kirillov)**.** *Seja* $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{m}$ *uma subálgebra polarizadora para* f *e* $M = \exp(M)$. *Defina-se* $\chi_{f,\mathfrak{m}} : M \to \mathbb{C}$ *por* $\chi_{f,\mathfrak{m}}(\exp(x)) = e^{2i\pi f(x)}$.

Definimos a representação de G *associada a* f *como sendo* $\pi_{f,\mathfrak{m}} = (\chi_{f,\mathfrak{m}})^G$

Para que esta definição faça sentido é necessário que $\chi_{f,\mathfrak{m}}$ seja uma representação e M seja um subgrupo fechado. Vejamos que tal é o caso.

Sejam $x, y \in \mathfrak{m}$. Tendo em conta que $\exp(x)\exp(y) = \exp(x \star y)$ e que $\mathfrak{m}$ é uma subálgebra polarizadora, vem que

$$\chi_f(\exp(x)\exp(y)) = e^{2i\pi f(x\star y)} = e^{2i\pi f(x)}e^{2i\pi f(y)}$$

e, portanto, χ_f é uma representação. Por outro lado, $\mathfrak{m}$ é subálgebra, como tal é fechada em $\mathfrak{g}$. Como a exponencial é um difeomorfismo, M é fechado.

A teoria de Kirillov diz-nos que, dado $f \in \mathfrak{g}^*$, e dada uma subálgebra polarizadora $\mathfrak{m}$ de f , então $\pi_{f,\mathfrak{m}}$ é irredutível, que qualquer representação irredutível é desta forma e que se $f,\ f' \in \mathfrak{g}^*$, com subálgebras polarizadoras respectivas $\mathfrak{m},\ \mathfrak{m}'$, estão na mesma órbita coadjunta, então $\pi_{f,\mathfrak{m}}$ e $\pi_{f',\mathfrak{m}'}$ são equivalentes.

Antes de enunciarmos formalmente e demonstrarmos os resultados de Kirillov, uma vez que grande parte das provas serão feitas por indução na dimensão do grupo, reduzindo a prova ao caso em que o centro é unidimencional, façamos alguns reparos a este respeito.

Seja Z o centro de G, isto é $Z = \exp(\mathfrak{z})$ e tome-se uma representação irredutível π. Note-se que para qualquer $g \in G$ e dado $z \in Z$ tem-se $\pi(z)\pi(g) = \pi(zg) = \pi(gz) = \pi(g)\pi(z)$. Assim, concluímos que para todo o $z \in Z$ o operador $\pi(z)$ é um múltiplo escalar da identidade.

Tomemos $\{z_1, ..., z_k\}$ uma base de $\mathfrak{z}$. Então, para todo $i \in \{1, ..., k\}$ existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tal que $\pi(\exp(z_i)) = \lambda_i Id$. Defina-se então

$$\mathfrak{z}_0 = \{\sum_i c_i z_i : c_1, ..., c_k \in \mathbb{R},\ \sum_i c_i \lambda_i = 0\}$$

de modo que $\dim(\mathfrak{z}_0) \leq \dim(\mathfrak{z}) - 1$ e $\pi_z = Id$, para todo o $z \in \mathfrak{z}_0$.

Admitamos que $\dim(\mathfrak{z}_0) \geq 1$ e seja $P : G \to \bar{G} = G/\exp(\mathfrak{z}_0)$ a projecção canónica. Então podemos tomar a representação $\bar{\pi}$ de $\bar{G}$ tal que

$$\bar{\pi} \circ P = \pi$$

Não é difícil ver que $\bar{\pi}$ é também irredutível e portanto podemos estudar π através de $\bar{\pi}$, num grupo de dimensão menor.

Quando $\mathfrak{z}_0$ é trivial, tem-se então que $\dim \mathfrak{z} = 1$, e portanto recorremos ao lema de Kirillov para estruturar a álgebra de Lie e daí retirar conclusões. Temos assim um *princípio de redução de dimensão.*

Essencialmente, todas as demonstrações seguem esta ideia, ainda que por vezes o espaço $\mathfrak{z}_0$ tomado seja diferente.

Teorema 2.6.1. *Sejam G um grupo de Lie nilpotente e $f \in \mathfrak{g}^*$. Então existe uma subálgebra polarizadora $\mathfrak{m}$ de f tal que $\pi_{f,\mathfrak{m}}$ é irredutível.*

Demonstração. Faça-se indução na dimensão do grupo, sendo o caso base trivial. Suponhamos que a dimensão de G é n e que o resultado é válido para todos os grupos de dimensão menor que n.

Admitamos, numa primeira instância, que existe $\mathfrak{z}_0 \subseteq \mathfrak{z}$ de dimensão um tal que $f(\mathfrak{z}_0) = 0$; note-se que tal espaço existe quando $\dim(\mathfrak{z}) > 1$. Seja $Z_0 = \exp(\mathfrak{z}_0)$.

Sejam $\bar{G} = G/Z_0$, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$, P e p as respectivas projecções canónicas. Defina-se $\bar{f}$ por $\bar{f} \circ p = f$, de modo que $\bar{f} \in \bar{\mathfrak{g}}^*$. Por hipótese de indução existe uma subálgebra polarizadora $\bar{\mathfrak{m}}$ de $\bar{f}$ tal que $\pi_{\bar{f},\bar{\mathfrak{m}}}$ é irredutível.

Ora, facilmente se vê que $\mathfrak{m} = p^{-1}(\bar{\mathfrak{m}})$ é subálgebra polarizadora de f. Além disso, $\pi_{f,\mathfrak{m}} = \pi_{\bar{f},\bar{\mathfrak{m}}} \circ P$, e portanto $\pi_{f,\mathfrak{m}}$ é irredutível.

Podemos assim admitir que $\mathfrak{z}$ é unidimensional e que $f(\mathfrak{z}) \neq 0$. Tomem-se $x, y, z, \mathfrak{g}_0$ como no lema de Kirillov, e seja $G_0 = \exp(\mathfrak{g}_0)$. Seja ainda $f_0 = f\restriction_{\mathfrak{g}_0}$.

Sem perda de generalidade podemos tomar z tal que $f(z) = 1$. Se no lema de Kirillov, substituirmos y por qualquer elemento da forma $y + \alpha z$ o resultado mantém-se verdadeiro, e portanto podemos ainda assumir que $f(y) = 0$.

Tome-se uma subálgebra polarizadora $\mathfrak{m}$ tal que $\pi_0 = \pi_{f_0,\mathfrak{m}}$ é uma representação irredutível de G_0; $\mathfrak{m}$ existe por hipótese de indução. Sendo y central em $\mathfrak{g}_0$ tem-se que $y \in \mathbf{r}_{f_0}$. No entanto como $f([x, y]) = f(z) = 1$ temos que $y \notin \mathbf{r}_f$ e, portanto, $\mathbf{r}_{f_0} \not\subset \mathbf{r}_f$. Portanto, por 1.2.7, tem-se que $\mathfrak{m}$ é polarizadora de f.

Vejamos agora que $\pi = \pi_{f,m}$ é irredutível. Note-se que por construção $\mathscr{H}_\pi = \mathscr{H}_{\pi_0}$, e portanto dado $A \in \mathrm{Hom}(\pi, \pi)$ então necessariamente $A \in \mathrm{Hom}(\pi_0, \pi_0)$. Pela irredutibilidade de π_0 e pelo lema de Schur tem-se que A é múltiplo escalar da identidade, e assim π também é irredutível.

$\square$

Vejamos agora que a construção das representações de Kirillov são independentes da subálgebra polarizadora escolhida, isto é:

Teorema 2.6.2. *Sejam $f \in \mathfrak{g}^*$ e $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ duas subálgebras polarizadoras de f. Então $\pi_{f,\mathfrak{m}} \simeq \pi_{f,\mathfrak{m}'}$.*

Demonstração. Uma vez mais faça-se indução na dimensão de G, sendo o resultado trivial para dimensão um (neste caso $\mathfrak{g}$ subálgebra polarizadora).

Seja novamente $\mathfrak{z}_0 \subseteq \mathfrak{z}$, tal que $f(\mathfrak{z}_0) = 0$, se $\mathfrak{z}_0$ não for trivial, uma vez que $\mathfrak{z}_0 \subseteq \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}'$, podemos considerar $\bar{G} = G/Z_0$, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$, P e p as respectivas projecções canónicas. Seja $\bar{f}$ tal que $\bar{f} \circ p = f$, de modo que $\bar{f} \in \bar{\mathfrak{g}}^*$, e sejam $\bar{\mathfrak{m}}, \bar{\mathfrak{m}}'$ os respectivos quocientes por $\mathfrak{z}_0$.

Facilmente se prova que $\bar{\mathfrak{m}}$ e $\bar{\mathfrak{m}}'$ são subálgebras polarizadoras de $\bar{f}$.

Por hipótese de indução, $\pi_{\bar{f},\bar{\mathfrak{m}}} \simeq \pi_{\bar{f},\bar{\mathfrak{m}'}}$, e, portanto, $\pi_{f,\mathfrak{m}} \simeq \pi_{\bar{f},\bar{\mathfrak{m}}} \circ P \simeq \pi_{\bar{f},\bar{\mathfrak{m}'}} \circ P \simeq \pi_{f,\mathfrak{m}'}$.

Assim, resta considerar o caso em que $\mathfrak{z}$ é unidimensional e f é não trivial no centro. Uma vez mais, tomem-se $x, y, z, \mathfrak{g}_0$ como no lema de Kirillov.

Existem dois casos a considerar:

- **Caso 1**: $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{g}_0$. Defina-se $f_0 = f\restriction_{\mathfrak{g}_0}$. Por hipótese de indução, e pela indução por etapas, temos

  $$\pi_{f,\mathfrak{m}} \simeq \pi^G_{f_0,\mathfrak{m}} \simeq \pi^G_{f_0,\mathfrak{m}'} \simeq \pi_{f,\mathfrak{m}'}$$

  O que prova o desejado.

- **Caso 2**: $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{g}_0$ ou $\mathfrak{m}' \not\subset \mathfrak{g}_0$. Admitamos que $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{g}_0$ (fazendo um raciocíneo análogo se $\mathfrak{m}' \not\subset \mathfrak{g}_0$). A ideia é mostrar que existe $\mathfrak{m}_1 \subseteq \mathfrak{g}_0$ tal que $\pi_{f,\mathfrak{m}_1} \simeq \pi_{f_0,\mathfrak{m}}$ e, da mesma maneira, que existe $\mathfrak{m}_2 \subset \mathfrak{g}_0$ tal que $\pi_{f,\mathfrak{m}_2} \simeq \pi_{f_0,\mathfrak{m}'}$, remetendo-nos ao primeiro caso.

  Ora, como $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_0$ tem codimensão um em $\mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{g}_0$ podemos tomar $x \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathbb{R}x$ e $f(y) = f(x) = 0$ sem invalidar o lema de Kirillov. Tomemos $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathbb{R}y$. Não é difícil ver que $\mathfrak{m}_1$ é subálgebra polarizadora de f.

  Por construção da representação induzida e uma vez que $f(x) = f(y) = 0$, não só o espaços $\mathscr{H}_{\pi_{f,\mathfrak{m}}}$ e $\mathscr{H}_{\pi_{f,\mathfrak{m}'}}$ são unitariamente isomorfos, como este isomorfismo comuta com a acção do grupo, isto é, as representações são de facto equivalentes, o que conclui a prova.

$\square$

Assim, tendo em conta os dois últimos resultados e uma vez que estamos apenas interessados nas classes de equivalência das representações, podemos simplesmente denotar por π_f a representação, irredutível, de Kirillov associada a f e a qualquer subálgebra polarizadora $\mathfrak{m}$ de f.

Antes de prosseguir com a teoria de Kirillov, enunciemos dois lemas, ambos da autoria de Mackey (ver [16] ou ainda [29]). A prova é feita recorrendo à maquinaria de Mackey

Lema 2.6.3. *Toda a representação irredutível de G (nilpotente) é monoidal, isto é, induzida por uma representação unidimensional.*

A prova não é complicada, sendo feita por indução e seguindo o mesmo principio de redução de dimensão, apoiando-se num resultado relativo às representações dos grupos de Lie nilpotentes com álgebras de Lie de centro unidimensional. Recomendamos [10] para consulta da prova.

Lema 2.6.4. *Sejam π_1 e π_2 duas representações irredutíveis de G não triviais no centro. Então, estas são equivalentes se e só se as suas restrições ao centro coincidir.*

Para esta prova remetemos a [29]. A base da prova advêm do conhecimento das representações de subgrupos fechados e abelianos, como é $Z = \exp(\mathfrak{z})$.

Teorema 2.6.5. *Seja π uma representação irredutível de G. Então existe $f \in \mathfrak{g}^*$ tal que $\pi \simeq \pi_f$*

Demonstração. A prova segue por indução na dimensão de G. Tome-se uma representação irredutível π e admitamos que existe um subespaço $\mathfrak{z}_0$ de $\mathfrak{z}$ tal que $\pi(\mathfrak{z}_0)$ é igual à identidade. Recorrendo ao principio de redução, tomando $\bar{\pi}$ a representação associada a π em $\bar{G}$, por hipótese de indução existe $\bar{f} \in \bar{\mathfrak{g}}^*$ tal que $\bar{\pi} \simeq \pi_{\bar{f}}$.

Ora, tomando f qualquer na pré-imagem de $\bar{f}$ não é difícil ver que $\pi \simeq \pi_f$.

Ficamos agora reduzidos ao caso em que $\mathfrak{z}$ é unidimensional e π não é a identidade no centro. Tomem-se $x, y, z, \mathfrak{g}_0$ como no lema de Kirillov e seja χ uma representação unidimensional tal que $\chi^G \simeq \pi$. Não é difícil de ver que, nestas condições, $\chi^{G_0} = \pi_0$ é também irredutível, logo por hipótese de indução, existe $f_0 \in \mathfrak{g}_0^*$ tal que $\pi_0 \simeq \pi_{f_0}$ e, assim, $\pi = \pi_{f_0}^G$.

Pela construção da representação induzida $f_0(z)$ determina $\pi_{f_0}^G(\mathrm{z})$, e analogamente $f(z) = f_0(z)$ determina $\pi_f(z)$. Assim, se ambas as representações agirem no mesmo espaço elas serão equivalentes. Vejamos que assim é.

Como $\pi = \pi_{f_0}^G$ não é identidade no centro, tem-se que $f_0(z) \neq 0$. Se $y \in \mathbf{r}_f$, então $f(z) = 0$, o que é absurdo. Logo por 1.2.7 concluímos que uma subálgebra polarizadora de f_0 também é de f.

Ora, dada a definição das representações de Kirillov, uma vez que podemos tomar uma subálgebra polarizadora em $\mathfrak{g}_0$, pela indução por etapas concluímos que π_f e $\pi_{f_0}^G$ actuam no mesmo espaço. Por aquilo que foi visto, obtemos a equivalência desejada e portanto o resultado fica provado. $\square$

Temos assim que toda a representação irredutível é uma representação de Kirillov, associada a algum funcional linear de $\mathfrak{g}$.

Assim, dada uma representação irredutível π, uma vez que existe $f \in \mathfrak{g}^*$ tal que $\pi \simeq \pi_f$, faz sentido falar na sua órbita. Quando assim for denotaremos a respectiva órbita por $\mathcal{O}_\pi$. O próximo resultado descreve, em termos de órbitas coadjuntas, as classes de equivalência das representações irredutíveis.

Teorema 2.6.6. *Sejam $f, l \in \mathfrak{g}^*$, e $\mathcal{O}_f$, $\mathcal{O}_l$ as órbitas coadjuntas respectivas. Então $\pi_f \simeq \pi_l$ se e só se $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_l$.*

Demonstração. Admitamos que $l = \mathrm{Ad}^*(g)f$ para $g \in G$, e seja $\mathfrak{h}$ um subespaço onde B_f é trivial (qualquer espaço contido em $\mathfrak{z}$, por exemplo). Seja ainda $\mathfrak{h}' = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}$.

Se $x, y \in \mathfrak{h}$, então $B_l(\mathrm{Ad}(g)x, \mathrm{Ad}(g)y) = l(\mathrm{Ad}(g)[x,y]) = f([x,y]) = 0$ e, portanto, em particular, qualquer subálgebra polarizadora de f também o é de l. Ora pela definição de indução, não é difícil de ver que o operador $A : \mathscr{H}_{\pi_f} \to \mathscr{H}_{\pi_l}$ dado por

$$Af(g') = f(g^{-1}g') \quad g' \in \mathfrak{g}$$

é um operador de entrelaçamento e que é invertível, sendo o seu inverso dado por

$$Bf(g') = f(gg')$$

Portanto as representações são equivalentes.

Vejamos agora a recíproca, onde é utilizada a indução na dimensão de G, sendo uma vez mais o caso base trivial. O caso em que $\mathfrak{z}$ não é unidimensional é semelhante aos casos já discutidos, aplicando a indução às representações $\pi_{\bar{f}}$ e $\pi_{\bar{l}}$ (tendo em conta 2.6.4); além disso se $\mathrm{Ad}^*(\bar{g})\bar{f} = \bar{l}$ e se g está na pré-imagem de $\bar{g}$, então não é difícil ver que $\mathrm{Ad}^*(g)f = l$.

Falta assim o caso em que o centro é unidimensional. Tomem-se $x, y, z, \mathfrak{g}_0$ como no lema de Kirillov. Note-se que podemos escolher x, y tais que $f(x) = f(y) = 0$, sem alterar a validade do lema. Além disso uma vez que temos

$$\mathrm{Ad}^*(tx)f(y) = f(y - tz) \quad t \in \mathbb{R}$$

podemos substituir l por qualquer outro elemento de $\mathcal{O}_l$ que seja zero em y.

Sejam f_0 e l_0 as restrições de f, l a $\mathfrak{g}_0$, respectivamente. Uma vez que $y \in \mathbf{r}_{f_0}$ mas $y \notin \mathbf{r}_f$ (pois $f([x,y]) = f(z) \neq 0$), temos $\mathbf{r}_{f_0} \not\subset \mathbf{r}_f$, logo por 1.2.7, se $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_0$ for uma subálgebra polarizadora de f_0, esta é também uma polarização de f. Analogamente, uma subálgebra polarizadora $\mathfrak{m}'$ de l_0 é subálgebra polarizadora de l.

Assim, pelo teorema da indução por etapas, temos $\pi_f \simeq \pi_{f_0}^G$ e $\pi_l \simeq \pi_{l_0}^G$. No entanto, por construção das representações de Kirillov e pela definição da representação induzida, sendo z central, o que define $\pi_{f_0}(z) = e^{2i\pi f_0(z)} = e^{2i\pi f(z)}$ e $\pi_{l_0}(z) = e^{2i\pi l_0(z)} = e^{2i\pi l(z)}$.

Como $\pi_f \simeq \pi_l$, por 2.6.4, tem-se que $e^{2i\pi f(z)} = e^{2i\pi l(z)}$ e, portanto, concluímos que $\pi_{f_0} \simeq \pi_{l_0}$. Assim, por hipótese de indução, existe $g_0 \in G_0$ tal que $\mathrm{Ad}^*(g_0)f_0 = l_0$, logo tem-se $\mathrm{Ad}^*(g_0)f = l$ em $\mathfrak{g}_0$.

Se $g = \exp(ty)$, com $t \in \mathbb{R}$, sendo y é central em $\mathfrak{g}_0$, tem-se que $\mathrm{Ad}^*(gg_0)f = \mathrm{Ad}^*(g)\mathrm{Ad}^*(g_0)f = \mathrm{Ad}^*(g_0)f = l$.

Por outro lado, $\mathrm{Ad}^*(gg_0)f(x) = \mathrm{Ad}^*(g_0)f(x) + t$, logo escolhendo adequadamente t, obtemos $\mathrm{Ad}^*(gg_0)f(x) = l(x)$, e portanto em todo o $\mathfrak{g}$ temos $\mathrm{Ad}^*(gg_0)f = l$, provando $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_l$.

Assim a prova fica completa. □

Algumas das provas recorrem a resultados não demonstrados, nomeadamente a 2.6.3 e 2.6.4. É possível fazer as provas sem recorrer a 2.6.4, no entanto as provas tornam-se morosas e técnicas. Por outro lado não é forçoso usar 2.6.3, podendo recorrer-se a uma forma mais fraca deste resultado, que diz respeito apenas a grupos de Lie cuja álgebra de Lie tem centro unidimensional (ver [10]).
Acabemos esta secção com um reparo final. O método das órbitas garante que existe uma bijecção

$$\phi : \hat{G} \to \mathfrak{g}/\mathrm{Ad}^*(G) = \mathcal{O}(G)$$

onde $\mathcal{O}(G)$ é o conjunto das órbitas. Prova-se ainda que ϕ é mais que bijecção, é de facto um homeomorfismo (ver por exemplo [8]). Deste modo o método das órbitas descreve também a topologia de $\hat{G}$.

2.6.1 Indução e restrição

Nesta secção, pretendemos responder a duas importantes questões da teoria da representação. Sejam G um grupo e H um seu subgrupo:

- Dada uma representação irredutível de G, quais os constituintes irredutíveis da sua restrição a H?

- Dada uma representação irredutível de H, quais os constituintes irredutíveis da sua indução a G?

Ora, para grupos finitos, ou compactos, as respostas são dadas em termo dos teoremas de Frobenius. No nosso caso, os grupos nilpotentes, conexos e simplesmente conexos, uma vez que as representações irredutíveis são parametrizadas por funcionais lineares, a resposta é dada em termo das órbitas coadjuntas de ambos os grupos.

A relação entre as órbitas dos dois grupos será feita mediante a projecção natural $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$, sendo esta simplesmente a restrição a $\mathfrak{h}$.

Teorema 2.6.7. *Sejam G um grupo e H um seu subgrupo fechado. Para quaisquer $f \in \mathfrak{g}^*$ e $f_0 \in \mathfrak{h}^*$, tem-se:*

- *A restrição de π_f a H decompõe-se no integral directo de representações irredutíveis de H que correspondem às órbitas que estão contidas em $p(\mathcal{O}_f)$;*

- *A representação $\pi_{f_0}^G$ decompõe-se num integral directo de representações irredutíveis de G que correspondem às órbitas cuja intersecção com $p^{-1}(\mathcal{O}_{f_0})$ é não vazia;*

Façamos apenas um resumo da ideia da prova. Em primeiro lugar, notamos que basta considerar subgrupos de codimensão um pois o caso geral resulta quando consideramos uma sucessão de subgrupos todos de codimensão um no seguinte.

Assim sendo, tomamos H um subgrupo de codimensão um, que é necessariamente normal em G. Além disso, G é produto semidirecto de H com um subgrupo da forma $\exp(\mathbb{R}x_0)$, com $x_0 \in \mathfrak{g}$, que é isomorfo a $\mathbb{R}$.

De seguida tomamos uma órbita genérica Ω de G e provamos que existem apenas dois casos possíveis:

- **Caso 1**: $\omega = p(\Omega)$ é uma órbita para H e $p^{-1}(\omega)$ é união de órbitas Ω_t, onde $t \in \mathbb{R}$ e $\Omega_t = \Omega + tf'$, para qualquer $f' \in \mathfrak{h}^\perp$;

- **Caso 2**: $p(\Omega)$ é união de órbitas ω_t onde, para todo t, $p^{-1}(\omega_t)$ está estritamente contida em Ω. Além disso, dados t_0, $t_1 \in \mathbb{R}$ tem-se que $\mathrm{Ad}^*(\exp(t_0x_0))\omega_{t_1} = \omega_{t_0+t_1}$;

O passo seguinte é mostrar que, no primeiro caso, dados $f \in \mathfrak{g}^*$ e a sua restrição f_0 a $\mathfrak{h}$, se tem

$$\pi_f \restriction_H \simeq \pi_{f_0} \text{ e } \pi_{f_0}^G \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{f+tf'}$$

Em relação ao segundo caso, se π_t for a representação associada a ω_t, tem-se:

$$\pi_f \restriction_H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_t \text{ e } \pi \simeq \pi_{f_0}^G$$

Estas decomposições em função de $\mathbb{R}$ advêm do facto de G ser o produto semiderecto de H com um grupo isomorfo a $\mathbb{R}$.

A prova completa pode ser consultada, por exemplo, em [10], onde a prova é feita com base na natureza geométrica das órbitas, havendo dois tipos de órbitas que traduzem a existência das duas situações supramencionadas. Em [24] a prova é feita sem recorrer à geometria das órbitas, sendo no entanto uma prova muito morosa, baseada em 1.2.7 (os dois casos existentes dão origem aos dois casos da prova).

Ora, este resultado descreve o espectro da indução de uma representação irredutível induzida, não descreve no entanto as multiplicidades dos constituintes irredutíveis. Este problema foi resolvido no artigo [22], publicado em 1987 por Corwin, Greenleaf e Grélaud.

Enunciaremos o resultado principal deste artigo, sem no entanto fazermos a sua demonstração, uma vez que esta é extremamente técnica, envolvendo geometria *semialgébrica*. Além disso, a prova é subtil, uma vez que é necessário manejar funções do ponto de vista da teoria da medida, isto é, saber lidar com subconjuntos de medida nula nas imagens destas funções.

Teorema 2.6.8. *Sejam G um grupo, H um subgrupo fechado, $f \in \mathfrak{h}^*$ e $\chi = e^{2i\pi f}$ um carácter de H e f' uma qualquer extensão de f a $\mathfrak{g}$. Então tem-se*

$$\chi^G \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} n_\pi \pi d\mu(\pi)$$

Onde μ é o "'push-forward"' para $\hat{G}$ de uma medida finita em $f' + \mathfrak{h}^\perp$, equivalente à medida de Lebesgue.

Se $dim(\mathcal{O}_l) - dim(\mathcal{O}_\chi) = 2dim(\mathcal{O}_l \cap f' + \mathfrak{h}^\perp)$ para $l \in f' + \mathfrak{h}^\perp$ p.p, então n_π é igual ao número de componentes conexas de $\mathcal{O}_\pi \cap (f' + \mathfrak{h}^\perp)$.

Caso contrário, n_π é infinito para todo o π p.p.

Grosso modo, a multiplicidade de uma representação π_l é dada pelo número de vezes que a imagem inversa $p^{-1}(\mathcal{O}_f)$ intersecta $\mathcal{O}_l$.

A prova assenta, essencialmente, nos seguintes princípios:

- considerando uma cadeia de subálgebras de Lie, ordenadas pela inclusão, todas de codimensão um na seguinte podemos fazer uma análise passo a passo do que se passa no processo de indução;

- existe uma estratificação finita (de Pukansky) de $\mathfrak{g}^*$ em camadas $\mathrm{Ad}^*(G)$-invariantes. Todas as órbitas coadjuntas em cada camada têm a mesma dimensão e cada camada tem uma *"'cross-section"'* algébricamente computável;

- a união Σ de todas as *cross-sections* supramencionadas é semialgébrica e é uma *cross-section* para todas as órbitas de $\mathfrak{g}^*$.

- Se U for a primeira camada que intersecta $p^{-1}(\mathcal{O}_f)$, a intersecção da *cross-section* associada a U com $\mathrm{Ad}^*(G)p^{-1}(\mathcal{O}_f)$ determina um espaço de medida, no qual é calculado o integral directo;

Como consequência temos:

Corolário 2.6.9. *Dada um representação de um grupo G, as suas multiplicidades são 0, 1 ou ∞ (infinito numerável).*

Assim, em termos teóricos, o método das órbitas resolve dois problemas base da teoria da representação: 1) a descrição de $\hat{G}$: todos os elementos do dual são representações de Kirillov; Representações são equivalentes se e só se as órbitas coadjuntas coincidirem; 2) decomposição de representações: uma vez que toda a representação é monoidal, o teorema 2.6.8 descreve na íntegra (constituintes, multiplicidade e espectro) a decomposição de qualquer representação.

2.6.2 Representação regular e medida em $\hat{G}$

Considere-se a representação regular $(\rho, L^2(G, \mu))$ de G, onde μ é uma medida de Haar; usemos a notação $L^2(G) = L^2(G, \mu)$. Sabemos que $\rho \simeq \mathbf{1}^G$, isto é, a indução da representação trivial. Tendo em conta que toda a representação irredutível de G é uma representação induzida, façamos algumas considerações.

Proposição 2.6.10. *Seja π uma representação irredutível de G. Então, π é subrepresentação de ρ. Além disso todas as multiplicidades são infinitas.*

Demonstração. Seja, π uma representação irredutível, $f \in \mathfrak{g}^*$ tal que $\pi \simeq \pi_{f,\mathfrak{m}}$. Além disso, π_f actua sobre um subespaço $\mathscr{H}_f$ de $L^2(G)$.

Ora, não é difícil de ver que $\mathscr{H}_f$ é fechado em $L^2(G)$ e claramente invariante em relação à acção de ρ (uma vez que a acção de ρ coincide com a de π_f), logo tem-se $\pi \leq \rho$. Por outro lado ρ é induzido do carácter $e^{2i\pi f}$, com f identicamente nula, de um subgrupo fechado, e portanto, seguindo 2.6.8 e uma vez que $0^\perp = \mathfrak{g}^*$, nunca temos a igualdade de dimensões necessárias para as multiplicidades serem finitas. Logo, é infinita. $\square$

Tendo em conta o resultado anterior, temos que existe em $\hat{G}$ uma medida equivalente à medida de Lebesgue em $\mathfrak{g}^*$. Chamemos a esta medida *medida canónica em $\hat{G}$*.

2.6.3 Dificuldades do método das órbitas

O método das órbitas de Kirillov prima pela sua elegância e por, no caso nilpotente (conexo e simplesmente conexo), resolver de facto os principais problemas da teoria da representação. Ainda que, para outras classes de grupos, o método não seja tão poderoso, este é fonte de inspiração para atacar determinados problemas. Além disso, a sua ligação com a quantização geométrica (ver [31] para uma breve introdução) revela que o método das órbitas é uma ferramenta de grande utilidade, não só na geometria, mas também na física matemática.

No entanto, este método apresenta grandes dificuldades quando tentamos trabalhar na prática com as representações de um grupo. Ora, a correspondência de Kirillov associa a cada classe equivalência de uma representação irredutível uma órbita coadjunta, e, portanto, o conhecimento das órbitas coadjuntas determina o conhecimento das representações.

Por sua vez, parametrizar e caracterizar as órbitas coadjuntas é em geral um trabalho moroso, e ,por vezes, de extrema dificuldade. Em relação ao grupo unitriangular, é possível com algumas considerações de teor combinatorial determinar alumas órbitas coadjuntas (mas "‘muito poucas"’):

Por outro lado, a própria construção das representações pode apresentar dificuldades. Dado um funcional linear, de modo a construir a representação de Kirillov que lhe está associada é necessário obter uma subálgebra polarizadora. Como foi referido existem métodos para determinar estas subálgebras, mas estes métodos são, regra geral, fatídicos, especialmente para grupos de grandes dimensões.

Assim, nasce a necessidade de uma teoria alternativa. Pretende-se, no entanto, que esta teoria preserve propriedades essenciais das representações irredutíveis.

O próximo capítulo é dedicado a essa mesma problemática. É definida a axiomática da teoria alternativa, a que chamaremos de *teoria de super-representações* e, para grupos álgebra, é construida uma teoria particular. Tanto a definição, como construção, mimicam o que acontece no caso finito.

3
Teoria de Super-representações para grupos álgebra

O intuito deste capítulo é definir o que se entende por uma *teoria de super-representações.* Como foi referido esta teoria pretende, em certa medida, generalizar a teoria das representações irredutíveis. Isto é, pretende-se que as propriedades fundamentais das representações irredutíveis ainda se verifiquem para esta nova teoria.

A motivação para esta definição advêm da teoria de supercaracteres, para grupos finitos, apresentada por Diaconis e Isaacs em [6]. A teoria de supercaracteres tem como base, sendo uma generalização deste, o trabalho desenvolvido por André no estudo dos caracteres do grupo unitriangular sobre um corpo finito de característica ímpar (ver [1]). Por sua vez o método de André foi influenciado pelo método das órbitas de Kirillov.

A utilidade desta teoria levou a que se fizesse um análogo para grupos de Lie, começando pelos grupos álgebra.

Assim, comecemos por definir a teoria de super-representações para um grupo de Lie geral.

Definição 15 (Teoria de super-representações)**.** *Sejam G um grupo de Lie, $\mathcal{X}$ uma partição de $\hat{G}$ e $\Sigma = \{\mu_X\}_{x\in\mathcal{X}}$ um conjunto de medidas indexadas por $\mathcal{X}$. Dado qualquer $X \in \mathcal{X}$ construa-se a representação*

$$\sigma_X = \int_X^{\oplus} \pi d\mu_x$$

Dizemos que o triplo $(\mathcal{X}, \Sigma, \{\sigma_X\}_{X\in\mathcal{X}})$ forma uma teoria de super-representações se toda a representação irredutível de G for *constituinte de um único* σ_X.

Se assim for aos elementos de σ_X *chamamos super-representações e dizemos que o par* $(\mathcal{X}, \Sigma)$ *define uma teoria de super-representações.*

Assim, todo o grupo de Lie G admite sempre pelo menos uma teoria de super-representações, nomeadamente tomando como super-representações as representações irredutíveis. A esta teoria de super-representações chamaremos *teoria trivial.*

Note-se que da definição resulta que as super-representações são disjuntas, à semelhança das representações irredutíveis. Temos ainda que:

Proposição 3.0.11. *Seja* G *uma grupo de Lie que admite uma teoria de super-representações. Então, duas super-representações são quase-equivalentes se e só se forem equivalentes.*

Demonstração. Seja $(\mathcal{X}, \Sigma, \{\sigma_X\}_{X\in\mathcal{X}})$ uma teoria de super-representações e supunhamos que $\sigma_{X_1} = \sigma_1$ e $\sigma_{X_2} = \sigma_2$, com $X_1 \neq X_2$ são quase-equivalentes.

Por definição, existem representações ρ_1 e ρ_2, múltiplas de σ_1 e σ_2 respectivamente tais que $\rho_1 \simeq \rho_2$.

Deste modo os constituintes irredutíveis de σ_1 são os mesmos que de σ_2 e, portanto, pela definição de super-representações, são iguais.

A recíproca é trivial. □

Assim sendo, se $(\mathcal{X}, \Sigma)$ definir uma teoria de super-representações para G, para todo $X \in \mathcal{X}$ podemos tomar como super-representações múltiplos constantes $n_X\sigma_X$, obtendo essencialmente a mesma teoria de super-representações.

Nas próximas secções iremos construir uma teoria de super-representações para grupos álgebra. A construção baseia-se na construção de super-caracteres feita em [6].

Todo este estudo é inspirado na teoria de supercaracteres para grupos álgebra finitos, assim todos os resultados obtidos vêm por analogia ao caso finito. No entanto, os resultados de factorização, ainda que existam no caso finito (estudados pelo autor e pelo Professor Carlos André) não estão ainda disponíveis na literatura.

3.1 Acções no dual de grupos álgebra

A construção feita recorre a um relaxamento da acção coadjunta no dual da álgebra dew Lie. Assim, comecemos por estudar a acção coadjunto nos grupos álgebra.

No que segue, G será um grupo álgebra da forma $1+\mathfrak{g}$, sendo $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. Comecemos por reparar que dados, $1+x \in G$ e $y \in \mathfrak{g}$, temos que $(1+x)y = y+xy \in \mathfrak{g}$, analogamente $y(1+x) = y+yx \in \mathfrak{g}$. Portanto G actua naturalmente sobre $\mathfrak{g}$. Esta acção será fundamental para o que segue.

Relembremos que a acção coadjunta é definida do seguinte modo:

$$(\mathrm{Ad}^* g).f(x) = f(\mathrm{Ad}(g^{-1})x) \quad g \in G,\ x \in \mathfrak{g},\ f \in \mathfrak{g}^*$$

Sejam agora $x \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$. Por definição temos que

$$\mathrm{Ad}(g^{-1})x = \frac{d}{dt}(C_{g^{-1}} \exp(tx))\bigg|_{t=0} = C_{g^{-1}}x$$

Isto é, a aplicação adjunta não é mais que a conjugação do grupo na álgebra.

Definam-se agora as acções direita e esquerda de G em $\mathfrak{g}^*$:

$$gf(x) = f(xg) \text{ e } fg(x) = f(gx) \quad g \in G,\ f \in \mathfrak{g}^*,\ x \in \mathfrak{g}$$

Dada a natureza do grupo, estas acções estão bem definidas e são compactíveis, isto é, dados $g, h \in G$ e $f \in \mathfrak{g}^*$ tem-se $g(fh) = (gf)h$. Além disso, são claramente contínuas.

Assim, introduzimos a acção $G \times G$ em $\mathfrak{g}^*$:

$$(g,h)f(x) = f(h^{-1}xg) \quad (g,h) \in G \times G,\ f \in \mathfrak{g}^*,\ x \in \mathfrak{g}$$

Deste modo, se $\Delta = \{(g,g) : g \in G\}$ for o subgrupo diagonal de $G \times G$, a acção coadjunta não é mais que a restrição desta acção a a Δ.

Referimo-nos à acção de GG em $\mathfrak{g}^*$ como a bi-acção de G em $\mathfrak{g}^*$. Note-se que a órbita de f por meio da bi-acção é $GfG = \{gfh :\ g,h \in G\}$. Além disso, é claro que as bi-órbitas particionam $\mathfrak{g}^*$. Para além disso toda a bi-órbita é união de órbitas coadjuntas.

Ora, $\mathfrak{g}$ não tem só a estrutura de álgebra de Lie, é também uma álgebra associativa; assim é possível definir uma acção de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}^*$ de modo análogo:

$$yf(x) = f(xy) \ e \ fy(x) = f(yx) \quad x,y \in \mathfrak{g},\ f \in \mathfrak{g}^*$$

Consideremos agora apenas as acções à esquerda, tanto de G, como de $\mathfrak{g}$. Para $f \in \mathfrak{g}^*$ denotemos por L_f o seu estabilizador no grupo e $\mathfrak{l}_f$ o estabilizador na álgebra, isto é:

$$L_f = \{g \in G : gf = f\} \text{ e } \mathfrak{l}_f = \{x \in \mathfrak{g} : xf = 0\}$$

Relembremos que a aplicação de $\mathfrak{g}$ para G dada por $x \mapsto 1 + x$ é um difeomorfismo e note-se que $L_f = 1 + \mathfrak{l}_f$. Além disso $\mathfrak{l}_f$ é subálgebra de Lie: se $x, y \in \mathfrak{l}_f$, então $[x, y]f = xyf - yxf = 0$, logo $\mathfrak{l}_f$ é fechado para o parêntesis de Lie(e é trivialmente fechado para a soma).

Vejamos que estes estabilizadores têm uma relação profunda entre eles:

Proposição 3.1.1. *Seja $f \in \mathfrak{g}^*$. Então que L_f é um subgrupo fechado (e, portanto, um subgrupo de Lie) e a sua álgebra de Lie é $\mathfrak{l}_f$.*

Demonstração. Seja $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L_f$ tal que $g_n \to g$ (note-se que uma vez que a topologia é métrica não há necessidade de recorrer a sucessões generalizadas).

Sendo a acção contínua tem-se naturalmente que $g_n f \to gf$ e, portanto, a sucessão constantemente igual a f converge para gf. Por unicidade de limite (a topologia é Hausdorff) concluímos que $g \in L_f$, logo L_f é fechado.

Seja $1 + x \in L_f$ e tome-se uma curva $\alpha(t) = 1 + tx$, com $t \in \mathbb{R}$. Derivando a curva na identidade vem que $x \in T_1(L_f)$. No entanto, $(1 + x)f = f \Leftrightarrow f + xf = f \Leftrightarrow xf = 0$, e portanto $\mathfrak{l}_f \subseteq T_1(L_f)$.

Por outro lado, $L_f = 1 + \mathfrak{l}_f$, logo têm a mesma dimensão e, portanto, vem a igualdade desejada. $\square$

Analogamente se prova que R_f é fechado e que $\mathfrak{r}_f$ é a sua álgebra de Lie. Notemos desde já a analogia com a acção coadjunta e as relações entre os estabilizadores $\mathscr{R}_f$ e $\mathbf{r}_f$.

Note-se ainda que L_f é difeomorfo a $\mathfrak{l}_f$, logo, sendo $\mathfrak{l}_f$ um espaço vectorial, temos que L_f é nilpotente, conexo e simplesmente conexo. Este reparo é importante pois afirma que estamos nas condições de recorrer à teoria de Kirillov, pelo que temos ao nosso dispor toda a maquinaria do método das órbitas.

Seja n o maior natural tal que $\mathfrak{g}^n \neq 0$, de modo que $\mathfrak{g}^{n+1} = 0$. Assim, para além de $\mathfrak{g}^n \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, temos ainda que $\mathfrak{g}^n \subseteq \mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{r}_f$, e portanto em particular $\mathfrak{l}_f$ e $\mathfrak{r}_f$ são diferentes de zero.

3.2 Construção de super-representações

Nesta secção, iremos definir, para cada $f \in \mathfrak{g}^*$ uma representação a que chamaremos η-representação. Estas representações serão de facto super-representações, e o resto da secção será dedicada a provar isso mesmo.

Definição 16 (η-representações). *Seja $f \in \mathfrak{g}^*$, considere-se o carácter de L_f associado a f, isto é:*

$$\begin{aligned} \chi_f : L_f &\to \mathbb{C} \\ 1+x &\mapsto e^{2i\pi f(x)} \end{aligned}$$

e defina-se a η-repreentação associada a f como sendo a representação induzida

$$\eta_f := (\chi_f)^G$$

Para que a definição faça sentido é necessário que χ_f seja uma representação e L_f seja um subgrupo fechado. Ora, pelo que já foi visto, L_f é fechado.

Vejamos que χ_f é uma representação. Sejam x e y elementos de $\mathfrak{l}_f$. Temos assim que $(1+x)(1+y) = 1+x+y+xy$ e, portanto,

$$\chi_f((1+x)(1+y)) = e^{2i\pi f(x+y+xy)} = \\ e^{2i\pi(f(x)+f(y)+f(xy))} = e^{2i\pi(f(x)+f(y)+yf(x))}$$

Ora, como $y \in \mathfrak{l}_f$ tem-se que $yf(x) = 0$, e portanto concluímos que

$$\chi_f((1+x)(1+y)) = e^{2i\pi f(x)}e^{2i\pi f(y)} = \chi_f(1+x)\chi_f(1+y)$$

de modo que χ_f é uma representação de L_f. Esta representação tem dimensão um, logo, é necessariamente irredutível.

Note-se que uma vez que $\mathfrak{l}_f$ é diferente de zero, como foi referido anteriormente, nenhuma η-representação vem a ser a representação regular.

O objectivo é provar que as η-representações são super-representações. Como veremos, as bi-órbitas irão desempenhar um papél análogo ao das órbitas coadjuntas, isto é as η-representações serão parametrizadas pelas bi-órbitas.

A indução matemática é uma ferramenta poderosa nas demonstrações que usam método das órbitas. No entanto, no que nos diz respeito, não iremos recorrer à indução. Isto porque estamos a trabalhar com grupos álgebra e o quociente de um grupo álgebra por um subgrupo nem sempre é um grupo álgebra; as definição apresentadas recorrem à estrutura explícita destes grupos, assim, nem sempre é possível considerar uma hipótese de indução para um subgrupo arbitrário.

No entanto, vimos até agora que, dado $f \in \mathfrak{g}^*$ se tem que χ_f é uma representação irredutível de um grupo de Lie nilpotente, conexo e simplesmente conexo. Portanto estamos nas condições de aplicar a teoria de Kirillov e descrever o espectro das η-representações, evitando assim a necessidade de recorrer à indução.

Comecemos com alguns lemas preliminares.

Lema 3.2.1. *Se $f \in \mathfrak{g}^*$, então $(f\mathfrak{g})^\perp = \mathfrak{l}_f$ e $\mathfrak{l}_f^\perp = f\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Por definição temos,

$$\begin{aligned}(f\mathfrak{g})^\perp &= \{x \in \mathfrak{g} :\ fa(x) = 0\ \forall a \in \mathfrak{g}\}\\ &= \{x \in \mathfrak{g} :\ f(ax) = xf(a) = 0\ \forall a \in \mathfrak{g}\} = \mathfrak{l}_f\end{aligned}$$

Sendo $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, é reflexivo, e portanto temos $((f\mathfrak{g})^\perp)^\perp = \overline{f\mathfrak{g}}$. Mas $f\mathfrak{g}$ é fechado, logo $\mathfrak{l}_f^\perp = f\mathfrak{g}$. □

Lema 3.2.2. *Sejam $f \in \mathfrak{g}^*$, $f_0 = f\restriction_{\mathfrak{l}_f}$ e $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}_f$ a projecção natural (isto é, a restrição). Então $p^{-1}(\mathcal{O}_{f_0}) = fG$.*

Demonstração. Vejamos que $p^{-1}(\mathcal{O}_{f_0}) = f + \mathfrak{l}_f^\perp$, saindo o resto pelo lema anterior. Ora, $\mathcal{O}_{f_0} = \{gf_0g^{-1} : g \in L_f\} = \{f_0g : g \in L_f\}$. Sejam $g = 1 + y \in L_f$ e $x \in \mathfrak{l}_f$. Então,

$$f_0g(x) = f_0(gx) = f_0(x) + f_0(yx) = f_0(x) + xf_0(y) = f_0(x)$$

e portanto concluímos que $\mathcal{O}_{f_0} = \{f_0\}$. Assim, $p^{-1}(\mathcal{O}_{f_0}) = p^{-1}(f_0) = \{l \in \mathfrak{g}^* : l\restriction_{\mathfrak{l}_f} = f_0\}$. Por outro lado, $\mathfrak{l}_f^\perp = \{l \in \mathfrak{g}^* : l\restriction_{\mathfrak{l}_f} = 0\}$.

Tome-se agora $l \in p^{-1}(f_0)$ e $x \in \mathfrak{l}_f$, tem-se que $(l - f)(x) = 0$, isto é $l - f \in \mathfrak{l}_f^\perp$ e assim $l \in f + \mathfrak{l}_f^\perp$. Portanto $p^{-1}(f_0) \subseteq f + \mathfrak{l}_f^\perp$. Por outro lado, se $l \in \mathfrak{l}_f^\perp$, então $(f + l)\restriction_{\mathfrak{l}_f} = f_0$, logo $l \in p^{-1}(f_0)$, portanto $f + \mathfrak{l}_f^\perp \subseteq p^{-1}(f_0)$, o que dá a igualdade desejada.

Pelo lema anterior temos que $p^{-1}(\mathcal{O}_{f_0}) = f + f\mathfrak{g} = fG$. □

Estes lemas servem de preâmbulo para demonstrar as propriedades fundamentais das η-representações.

Proposição 3.2.3 (Propriedade fundamental I)**.** *Sejam f e l elementos de $\mathfrak{g}^*$, π_l a representação irredutível associada a l. Então π_l é constituinte irredutível de η_f se e só se $\mathcal{O}_f \subseteq GfG$.*

Demonstração. Tome-se $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}_f$ a projecção canónica e f_0 a restrição de f a $\mathfrak{l}_f$. Seja π_l uma representação irredutível, constituinte de η_f. Por 2.6.7, tal acontece se e só se $\mathcal{O}_l \cap p^{-1}(\mathcal{O}_{f_0}) \neq \emptyset$.

Já vimos que $p^{-1}(\mathcal{O}_{f_0}) = p^{-1}(f_0) = fG$. Assim, sem perda de generalidade, podemos admitir $l = fg$ para algum $g \in G$, de modod que $\mathcal{O}_l = \{h(fg)h^{-1} : h \in G\}$, logo $\mathcal{O}_l \subseteq GfG$.

Reciprocamente, seja $l \in \mathfrak{g}^*$ tal que $\mathcal{O}_l \subseteq GfG$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $l = gfh$, para alguns $g,\ h \in G$.

Assim, temos $g^{-1}l = fh \Leftrightarrow g^{-1}lg = fhg$ e portanto $\mathcal{O}_l \cap fG \neq \emptyset$. Uma vez mais por 2.6.7, vem que π_l é constituinte irredutível de η_f. □

Este último resultado juntamente com o próximo permitem parametrizar as η-representações por meio das bi-órbitas e provar que de facto elas constituem uma teoria de super-representações.

Proposição 3.2.4 (Propriedade fundamental II). *Sejam f e l elementos de $\mathfrak{g}^*$. Então $\eta_f \simeq \eta_l$ se e só se $GfG = GlG$*

Demonstração. Admitamos que $\eta_f \simeq \eta_l$. Então, os seus constituintes irredutíveis são os mesmos (a menos de equivalência), logo a igualdade das bi-órbitas segue pela proposição anterior. Reciprocamente, se $GfG = GlG$, uma vez mais pela proposição anterior os constituintes irredutíveis de η_f são os mesmos (a menos de equivalência) que os de η_l. Assim, para que as duas η-representações sejam equivalentes temos de provar que as multiplicidades coincidam.

Ora, por 2.6.8, a finitude das multiplicidades de η_f ficam determinadas pelas relações entre $\dim(\mathcal{O}_k)$ e $2\dim(O_k \cap fG)$, para $k \in fG$ p.p. No entanto, $GlG = GfG$ e, portanto, sem perda de generalidade, $lG = gfG$, para algum $g \in G$. Logo $lG = gfGg^{-1}$ e, naturalmente, $g\mathcal{O}_k g^{-1} = \mathcal{O}_k$.

Por outro lado $g(\mathcal{O}_k \cap fG)g^{-1}$ é difeomorfo a $\mathcal{O}_k \cap fG$. Como $g(\mathcal{O}_k \cap fG)g^{-1} = \mathcal{O}_k \cap gfG = \mathcal{O}_k \cap lG$, as multiplicidades de η_f definem as de η_l.

Se foram ambas infinitas, logo numeráveis, não há nada a fazer. Por outro lado se forem finitas, a multiplicidade de π_k em η_1 é determinada pelo o número de componentes conexas de $\mathcal{O}_k \cap fG$, que como foi visto é difeomorfo a $\mathcal{O}_k \cap lG$.

Assim as η-representações são equivalentes.

□

Assim, pelos dois resultados anteriores concluímos que uma η-representações depende apenas da bi-órbita Ω que lhe está associada, e portanto podemos denotar por η_Ω um representante da sua classe de equivalência.

Seguindo 2.6.8, dado $f \in \mathfrak{g}^*$, existe uma medida μ_f tal que

$$\eta_f \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} n_\pi \pi d\mu_f$$

onde n_π é a multiplicidade de π.

Ora, as órbitas coadjuntas que não estejam em GfG vão ter medida nula para a medida μ_f, logo podemos re-escrever o integral acima como:

$$\eta_f \simeq \int_{GfG}^{\oplus} \pi d\mu_f$$

Por outro lado, se tomarmos $f' \in GfG$, a medida $\mu_{f'}$ vai ser equivalente a μ_f. Assim, dada uma bi-órbita Ω fixemos uma medida μ_Ω, associada a qualquer elemento de Ω.

Deste modo as η-representações apresentão-se na forma final como:

$$\eta_f \simeq \int_{GfG}^{\oplus} \pi d\mu_{GfG}$$

Tendo em conta o que foi visto e as proposições anteriores, obtemos o resultado principal desta secção. Pela correspondência de Kirillov, identificamos $\hat{G}$ com o espaço das órbitas coadjuntas.

Proposição 3.2.5. *Considere-se a partição $\mathcal{X} = \{GfG : f \in \mathfrak{g}^*\}$ de $\hat{G}$, e sejam $\Sigma = \{\mu_{GfG} : f \in \mathfrak{g}^*\}$ e $\Gamma = \{\eta_f : f \in \mathfrak{g}^*\}$. Nestas condições, o triplo $(\mathcal{X}, \Sigma, \Gamma)$ forma uma teoria de super-representações.*

A esta teoria de super-representações chamaremos de *teoria canónica*.

Observação 2. *As super-representações foram definidas por meio da acção esquerda de G em $\mathfrak{g}^*$, isto é, são representações induzidas do estabilizador esquerdo.*

Seria natural questionarmo-nos que tipo de teoria seria obtida se recorrermos à acção direita e, portanto, considerando o estabilizador direito. Sabemos que o espectro da indução de um carácter de um subgrupo H da forma χ_f depende de $f + \mathfrak{h}^\perp$ (conferir 2.6.8), de modo que, ao definir a η-representação como a indução do carácter de $\mathfrak{r}_f$, o espectro dependeria da órbita direita Gf.

No entanto, à luz da segunda propriedade fundamental (3.2.4) a super-representação η_f depende exclusivamente da bi-órbita de f, portanto ambas as definições originam a mesma teoria.

Dada uma super-representação η_f sabemos qual o seu espectro, faltando assim estudar as multiplicidades que ocorrem na sua decomposição.

Comecemos por notar que dado $l \in \mathfrak{g}^*$ temos que $\mathcal{O}_l \cap lG$ é conexo por arcos, portanto, é conexo. De facto, sejam $1+x,\ 1+y \in G$ e representemos por $1+\bar{y}$ o inverso de $1+y$. Admitamos que $(1+y)l(1+\bar{y}) = l(1+x)$, de modo que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tem a igualdade $(1+ty)l(1+\bar{ty}) = l(1+tx)$ e portanto, vem o desejado.

Proposição 3.2.6. *Seja $f \in \mathfrak{g}^*$ e η_f a super-representação que lhe está associada. Então todos os constituintes irredutíveis de η_f têm multiplicidade infinita ou igual a um.*

Demonstração. Basta ter em conta a observação acima e recorrer ao resultado 2.6.8. □

Façamos uma pequena análise da restrição de super-representações. Seja $H = 1+\mathfrak{h}$ um subgrupo álgebra fechado de G. Ambos os grupos admitem uma teoria de super-representações, nomeadamente a canónica. Estudemos assim a relação entre as duas.

Consideremos $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ a projecção natural, isto é, dado $l \in \mathfrak{g}^*$ temos que $p(l) = l\restriction_{\mathfrak{h}^*} = l_0$. Tomando $f \in \mathfrak{g}$, temos

$$\eta_f \restriction_H \simeq \Big(\int_{GfG}^{\oplus} \pi_l d\mu\Big)\restriction_H \simeq \int_{GfG}^{\oplus} \pi_l \restriction_H d\mu$$

Podemos assim descrever os constituintes irredutíveis da restrição de uma super-representação.

Proposição 3.2.7. *Sejam $H = 1+\mathfrak{h}$ um subgrupo álgebra fechado de $G = 1+\mathfrak{g}$, $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ a projecção natural e $f \in \mathfrak{g}^*$. Então, $\eta_f \restriction_H$ decompõe-se no integral directo das representações irredutíveis π_k tais que $HkH \cap p(GfG)$ é diferente de vazio.*

Demonstração. Seja $k \in \mathfrak{h}^*$ tal que $HkH \cap p(GfG)$ é diferente de vazio. Vejamos que π_k é constituinte irredutível de $\eta_F \restriction_H$. Por 2.6.7, tal acontece se e só se existe $f' \in GfG$ tal que $\mathcal{O}_k \cap p(\mathcal{O}_{f'})$.

Tome-se $h_1kh_2 \in HkH \cap p(GfG)$. Então, existem g_1 e g_2 em G tais que $h_1kh_2 = g_1f_0g_2$, onde $p(f) = f_0$. Assim, $k = gf_0h$, para alguns $g, h \in G$, logo $\mathcal{O}_k \cap p(\mathcal{O}_{gfh})$.

Assim, vem o desejado.

□

Sendo as super-representações parametrizadas pelas bi-órbitas, que por sua vez são união de órbitas coadjuntas é expectável que tenhamos um análogo ao resultado **??**, isto é, que a restrição de uma super-representação η_f a um subgrupo álgebra H se decomponha em integral directo de super-representações η_k tais que $HkH \cap p(GfG) \neq \emptyset$.

Notamos que para provar tal conjectura é suficiente analisar as multiplicidades dos constituintes irredutíveis. Se, para todos os $l_1, l_2 \in HkH$, a multiplicidade de π_{l_1} for igual à de π_{l_2}, o resultado fica provado.

Para questões relativas à multiplicidade de restrições de representações, referimos [22]

3.2.1 Alguns comentários

Como foi referido, a teoria canónica baseia-se no relaxamento do método das órbitas de Kirillov. Kirillov constrói as representações irredutíveis com base na acção coadjunta, que no caso dos grupos álgebra não é mais que a acção contragradiente da conjugação. Ao relaxar esta acção, tomando a bi-acção, seria expectável uma parametrização por meio de bi-órbitas, tal como as representações irredutíveis são parametrizadas pelas órbitas coadjuntas.

Um dos problemas desta construção é ser exclusiva dos grupos álgebra. No entanto, da mesma maneira que a acção por meio da conjugação é a interpretação da acção coadjunta nos grupos álgebra, podemos encarar a bi-acção como instância de uma acção mais abrangente.

Considere-se $\Psi : G \times G \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ tal que $\Psi(g,h)x = d(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \mathcal{R}_h)_1 x$, onde $\mathcal{L}_g$ e $\mathcal{R}_h$ são as translações à esquerda e à direita respectivamente. Define-se assim a acção contragradiente de Ψ em $\mathfrak{g}^*$:

$$Psi^*(g,h)f(x) = f(\Psi(g,h)^{-1}x) \quad g,h \in G,\ f \in \mathfrak{g}^*,\ x \in \mathfrak{g}$$

Chamemos de acção-Ψ a esta acção. Quando interpretada nos grupos álgebra, a acção-Ψ coincide com a bi-acção.

Assim, temos uma noção mais abrangente do método utilizado, sugerindo assim a sua generalização.

No que toca os grupos álgebra é mais fácil calcular as bi-órbitas que as órbitas coadjuntas, daí a vantagem de considerar estas representações. No entanto este cálculo é, por vezes, fastidioso e moroso.

3.3 Irredutibilidade

Construída uma teoria de super-representações uma questão importante é de saber em que condições uma dada super-representação é irredutível.

Apresentaremos uma série de pequenos resultados relativos à irredutibilidade de uma super-representação, culminando num critério de irredutibilidade. Comecemos por reparar que uma super-representação é irredutível se tiver um único constituinte irredutível e se este tiver multiplicidade um. Ora, uma super-representação η_f terá um único constituinte irredutível se $GfG = \mathcal{O}_f$, de modo que temos uma condição necessária natural para a irredutibilidade.

O primeiro resultado a ser apresentado é também uma condição necessária, dizendo respeito ao centro da àlgebra de Lie.

Proposição 3.3.1. *Se $f \in \mathfrak{g}^*$ for tal que η_f é irredutível, então $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{r}_f$.*

Demonstração. Como foi mencionado, se η_f é irredutível, então $GfG = \mathcal{O}_f$. Por outro lado, $\mathcal{O}_f \subseteq f + \mathfrak{z}^\perp$, uma vez que, para todo $z \in \mathfrak{z}$, $gfg^{-1}(z) = f(z)$.

Uma vez que $GfG = \mathcal{O}_f \subseteq \mathfrak{z}$, dado $x \in \mathfrak{g}$ tem-se que $(1+x)f \in f + \mathfrak{z}^\perp$, e portanto $(1+x)f(z) = f(z)$, logo $xf(z) = zf(x)fz(x) = 0$, da arbitrariedade de x vem o desejado. □

Em relação aos grupos álgebra em que o centro de $\mathfrak{g}$ seja unidimensional, este resultados de pouco serve. Se n for o menor n. Deste modo todo o centro está incluído em $\mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{r}_f$.

Assim, enunciamos o próximo resultado:

Proposição 3.3.2. *para $f \in \mathfrak{g}^*$, η_f é irredutível se e só se $GfG = \mathcal{O}_f$ e $dim(\mathcal{O}_f) = 2dim(fG)$.*

Demonstração. Admitamos que η_f é irredutível. Então $GfG = \mathcal{O}_f$ e, portanto, $\mathcal{O}_f \cap fG = fG$ e a multiplicidade de π_f é um. Ora, seguindo 2.6.8, tal só acontece se $\dim(\mathcal{O}_k) = 2\dim(\mathcal{O}_k \cap fG)$, para todo k p.p em fG. No entanto, uma vez que $GfG = \mathcal{O}_f$, dado $k \in fG \subseteq GfG = \mathcal{O}_f$, tem-se $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}_f$ e, portanto, se $\dim(\mathcal{O}_k) = 2\dim(\mathcal{O}_k \cap fG)$, para todo o k p.p em fG, é forçoso que $\dim(\mathcal{O}_f) = 2\dim(\mathcal{O}_f \cap fG) = 2\dim(fG)$.

Reciprocamente, se $GfG = \mathcal{O}_f$ e $\dim(\mathcal{O}_f) = 2\dim(fG)$, analogamente ao que já foi visto, temos $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}_f$, para todo o $k \in fG$. Assim, temos $\dim(\mathcal{O}_k) = 2\dim(\mathcal{O}_k \cap fG)$ para todo o k p.p em fG. Deste modo, por 3.2.6 vem que η_f é irredutível.

□

O próximo resultado tem o seu análogo no caso dos supercaracteres dos grupos álgebra finitos. Relaciona a irredutibilidade com os estabilizadores à esquerda e à direita, isto é, L_f e R_f, para $f \in \mathfrak{g}^*$.

No entanto, para a demonstração, iremos necessitar do lema seguinte.

Lema 3.3.3. *Sejam N e M duas variedades da mesma dimensão tal que M é conexa e N é uma subvariedade mergulhada de M, fechada para a toplogia induzida. Então $N = M$.*

Demonstração. Considere-se a inclusão $N \hookrightarrow M$, que é um mergulho suave. Tendo as duas variedades a mesma dimensão, o seu diferencial em todos os pontos é bijectivo. Assim, pelo teorema da função inversa, a sua imagem é um aberto de M.

Ora, por hipótese, N é fechado, uma vez que é também aberto, a conexidade de M implica a igualdade desejada. □

Proposição 3.3.4. *Para $f \in \mathfrak{g}^*$, η_f é irredutível se e só se $\mathfrak{l}_f + \mathfrak{r}_f = \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Tome-se $f \in \mathfrak{g}^*$ e admitamos que η_f é irredutível. Pela proposição anterior, temos que $\dim(\mathcal{O}_f) = 2\dim(fG)$. No entanto, como já foi mencionado, podemos definir super-representações com a acção à direita, obtendo no entanto a mesma teoria. Deste modo, se η_f for irredutível temos também que $\dim(\mathcal{O}_f) = 2\dim(Gf)$, e portanto concluímos que $\dim(fG) = \dim(Gf)$.

Não é difícil ver que o espaço tangente $T_f(GfG)$ da bi-órbita no ponto f, não é mais do que $f\mathfrak{g}+\mathfrak{g}f$, e portanto a sua dimensão é $\dim(f\mathfrak{g})+\dim(\mathfrak{g}f)-\dim(f\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}f)$. Por outro lado, pelo que já foi considerado, e uma vez que $GfG = \mathcal{O}_f$ e $\dim(O_f) = 2\dim(fG) = 2\dim(f\mathfrak{g}) = \dim(f\mathfrak{g}) + \dim(\mathfrak{g}f)$, concluímos que $\dim(f\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}f) = 0$.

Se $\dim(f\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}f) = 0$, então $f\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}f$ é um só ponto e, como $0 \in f\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}f$, concluímos que $f\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}f = 0$. Uma vez que $\mathfrak{g}f = \mathfrak{l}_f^\perp$ e $f\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_f^\perp$, temos $(f\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}f)^\perp = (\mathfrak{l}_f^\perp \cap \mathfrak{r}_f^\perp)^\perp = \mathfrak{g}$.

Ora, $(\mathfrak{l}_f^\perp \cap \mathfrak{r}_f^\perp)^\perp = \mathfrak{l}_f + \mathfrak{r}_f$ e, portanto, vem o desejado.

Reciprocamente, se $\mathfrak{l}_f + \mathfrak{r}_f = \mathfrak{g}$, então, pelo já discutido, temos $\mathfrak{g}f \cap f\mathfrak{g} = 0$. Queremos agora ver que $\mathcal{O}_f = GfG$ e que $\dim(\mathcal{O}_f) = 2\dim(fG)$.

Ora, temos $\dim(GfG) = \dim(f\mathfrak{g}) + \dim(\mathfrak{g}f)$. Por outro lado o espaço tangente de $\mathcal{O}_f$ identifica-se naturalmente com $\{xf + f\bar{x} : x \in \mathfrak{g}\}$, onde $\bar{x}$ denota o único elemento de $\mathfrak{g}$ tal que $(1+x)^{-1} = 1 + \bar{x}$.

Note-se que $\{xf + f\bar{x} : x \in \mathfrak{g}\} \subseteq \mathfrak{g}f + f\mathfrak{g}$. Vejamos a inclusão inversa.

Uma vez que $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}_F + \mathfrak{r}_f$, vem $\mathfrak{g}f = \mathfrak{r}_f f$ e $f\mathfrak{g} = f\mathfrak{l}_f$. Além disso, dado $x \in \mathfrak{l}_f$ temos $\bar{x} \in \mathfrak{l}_f$ e, analogamente, para $\mathfrak{r}_f$. Assim, $\mathfrak{g}f$ e $f\mathfrak{g}$ estão contidos em $\{xf + f\bar{x} : x \in \mathfrak{g}\}$. Sendo este um espaço vectorial, temos $\mathfrak{g}f + f\mathfrak{g} \subseteq \{xf + f\bar{x} : x \in \mathfrak{g}\}$, e, portanto, a igualdade de conjuntos.

Ora, a bi-órbita GfG é conexa e $\mathcal{O}_f \subseteq GfG$. Tendo os dois a mesma dimensão, o lema anterior implica a igualdade.

Veja-se agora que $\dim fG = \dim Gf$. Atendendo a que $\dim f\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{g} - \dim f\mathfrak{g}^{\perp}$, temos

$$\begin{aligned}\dim fG = \dim f\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{l}_f = \\ = \dim\mathfrak{r}_f - \dim(\mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{r}_f) = \dim(\mathfrak{r}_f/(\mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{r}_f))\end{aligned}$$

Tome-se a aplicação

$$\begin{aligned}\phi : \mathfrak{r}_f/(\mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{r}_f) &\to \mathfrak{r}_f f = \mathfrak{g}f \\ [x] &\mapsto xf\end{aligned}$$

Vejamos que ϕ está bem definida e que é um isomorfismo linear. Sejam x e y tais que $[x] = [y]$, ou seja, tais que $x - y \in \mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{r}_f$. Portanto temos que $(x-y)f = 0$, logo $xf = yf$ e assim $\phi([x]) = \phi([y])$.

Se x e y forem tais que $\phi([x]) = \phi([y])$ então $(x-y)f = 0$ e, portanto, $x, y \in \mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{r}_f$, o que implica que $[x] = [y]$, e portanto ϕ é injectiva. Claramente ϕ é sobrejectiva e linear, logo um isomorfismo, portanto $\dim(f\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{r}_f/(\mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{r}_f)) = \dim(\mathfrak{g}f)$.

Assim, resumindo o que vimos até agora, temos $GfG = \mathcal{O}_f$, $\dim(GfG) = \dim(\mathfrak{g}f) + \dim(f\mathfrak{g})$ e $\dim(\mathfrak{g}f) = \dim(f\mathfrak{g})$.

Pelo que concluímos que $GfG = \mathcal{O}_f$ e que $\dim(\mathcal{O}_f) = 2\dim(fG)$, logo η_f é irredutível.

□

Dado um grupo álgebra $1 + \mathfrak{g}$ foi referido que este pode ser visto como um subgrupo das unidades da álgebra $\mathcal{A} = \mathbb{R}1 + \mathfrak{g}$, que tem $\mathfrak{g}$ como radical de Jacobson. A acção direita e esquerda pode ser naturalmente estendida a uma acção à esquerda (ou à direita) de $\mathcal{A}$ em $\mathfrak{g}^*$ definindo:

$$fa(x) = f(ax) \quad a \in \mathcal{A},\ f \in \mathfrak{g}^*,\ x \in \mathfrak{g}$$

Assim, dado $f \in \mathfrak{g}^*$ vem que $f\mathcal{A}$ é um $\mathcal{A}$-módulo. Assim, define-e:

Definição 17. *Para $f \in \mathfrak{g}^*$, definimos o seu $\mathcal{A}$-módulo associado como sendo $f\mathcal{A}$.*

No caso dos supercaracteres, onde as definições são análogas, foi conjecturado por André que um supercaracter ξ_f é irredutível se e só se o radical de Jacobson de $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(f\mathcal{A})$ for zero, isto é, $J(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(f\mathcal{A})) = 0$.

Tome-se $f \in \mathfrak{g}^*$ e seja $\phi \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(f\mathcal{A})$. A imagem de ϕ fica determinado pela imagem de f: seja $a \in \mathcal{A}$ tal que $\phi(f) = fa$.

Se $\phi \in J(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(f\mathcal{A}))$ então ϕ é nilpotente, como tal existe um n tal que $\phi^n = 0$. Ora, para todo n $\phi^n(f) = fa^n$. Assim, sendo ϕ nilpotente, também a o será, logo, temos que $a \in \mathfrak{g}$. Atendendo a esta observação, obtemos:

Corolário 3.3.5. *Seja $f \in \mathfrak{g}^*$, se $J(End_{\mathcal{A}}(f\mathcal{A})) = 0$, então η_f é irredutível.*

Demonstração. Para todo $x \in \mathcal{A}$, a correspondência $g \mapsto xg$ define um $\mathcal{A}$-endomorfismo $\phi_x : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ em que $\phi_x(f\mathcal{A}) = xf\mathcal{A}$ Tomando $x \in \mathfrak{g}$ tal que $xf \in f\mathfrak{g}$, obtemos $\phi_x \in J(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(fA))$, logo $\phi_x = 0$ e, em particular, $xf = \phi_x(f) = 0$. Daqui, resulta que $\mathfrak{g}f \cap f\mathfrak{g} = 0$, uma vez que, se $\mathfrak{g}f \cap f\mathfrak{g} \neq 0$, então existem $x, y \in \mathfrak{g}$ tais que $xf = fy$, logo $xf \in f\mathfrak{g}$. Portanto, por 3.2.1, tem-se $\mathfrak{r}_f + \mathfrak{l}_f = (\mathfrak{g}f)^\perp + (f\mathfrak{g})^\perp = (\mathfrak{g}f + f\mathfrak{g})^\perp = \mathfrak{g}$ o que prova que η_f é irredutível. □

3.4 Factorização de super-representações

No que segue pretendemos demonstrar um resultado de factorização de super-representações em produtos tensoriais de super-representações mais simples, a que chamaremos de *super-representações elementares*. Esta factorização de η_f dependerá do $\mathcal{A}$-módulo associado a f.

Assim sendo, comecemos por introduzir as noções necessárias relativas a produtos tensoriais de representações.

Sejam $(\pi_1, \mathscr{H}_1)$ e $(\pi_2, \mathscr{H}_2)$ duas representações de um grupo G localmente compacto. Ora, geralmente o produto tensorial algébrico de espaços de Hilbert não é espaço de Hilbert; assim denotemos por $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ a completação de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ e considere-se o produto interno (estendido por bilinearidade)

$$(v \otimes w, v' \otimes w') = (v, v')(w, w') \quad v, v' \in \mathscr{H}_1,\ w, w' \in \mathscr{H}_2$$

Assim, tem-se que $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ é um espaço de Hilbert. Deste modo, é possível definir uma representação $\pi_1 \otimes \pi_2$ de G, em $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$, estendendo por bilinearidade e continuidade, por

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(g)(v \otimes w) = \pi_1(g)v \otimes \pi_2(g)w \quad g \in G,\ v \in \mathscr{H}_1,\ w \in \mathscr{H}_2$$

A esta representação damos o nome de *produto tensorial (ou de Kronecker) de* π_1 *com* π_2. Uma observação importante relativa a caracteres:

estes são representações unidimensionais sobre $\mathbb{C}$ e, uma vez que $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}$, que é um espaço de Hilbert, temos que, não só $\mathbb{C}\hat{\otimes}\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}$ como o produto tensorial de caracteres é o produto usual de caracteres.

Comecemos por relacionar os espectros do produto tensorial de duas representações de um grupo de Lie nilpotente.

Proposição 3.4.1. *Sejam* $\pi_1 \simeq \int_{X_1}^{\oplus} \pi d\mu$ *e* $\pi_2 \simeq \int_{X_2}^{\oplus} \pi' d\nu$ *duas representações de um grupo de Lie, nilpotente, conexo e simplesmente conexo. Então*

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \int_{X_1+X_2}^{\oplus} (\pi + \pi')d(\mu + \nu)$$

Demonstração. Comecemos por notar que, pelo método das órbitas, podemos tomar X_1 e X_2 como união de órbitas coadjuntas.

Sejam $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$ os espaços onde actuam π_1 e π_2, respectivamente. Repare-se que, se considerarmos a representação $\pi_1 \times \pi_2$ de $G \times G$ em $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ definida por

$$\pi_1 \times \pi_2(g, h)(u \otimes v) = \pi_1(g)u \otimes \pi_2(h)v \quad g, h \in G,\ u \in \mathscr{H}_1,\ v \in \mathscr{H}_2$$

estendendo-se por bilinearidade, então $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ não é mais que a restrição de $\pi_1 \times \pi_2$ a G, este sendo visto como o subgrupo diagonal de $G \times G$.

Além disso, temos que $\pi_1 \times \pi_2 = \int_{X_1 \times X_2}^{\oplus} \pi \times \pi' d(\mu \times \nu)$, logo a restrição de $\pi_1 \times \pi_2$ a G não é mais que

$$\int_{X_1 \times X_2}^{\oplus} (\pi \times \pi') \restriction_G d(\mu \times \nu)$$

Por sua vez se, Ω e Ω' forem as órbitas coadjuntas correspondentes a π e π', respectivamente, recorrendo a 2.6.7 temos

$$(\pi \times \pi') \restriction_G \simeq \int_{\Omega+\Omega'}^{\oplus} \pi'' d\mu'$$

Portanto, uma vez que X_1 e X_2 são união de órbitas coadjuntas, vem o desejado.

□

Em particular, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.4.2. *Seja G um grupo álgebra e f, $l \in \mathfrak{g}^*$. Então*

$$\eta_f \otimes \eta_l \simeq \int_{GfG+GlG}^{\oplus} \pi d\mu'$$

Também iremos recorrer a um resultado de Mackey, embora este não seja demonstrado, a sua demonstração pode ser encontrada em [15, 25].

Definição 18 (Grupos discretamente relacionados)**.** *Seja G um grupo localmente compacto. Dois subgrupos fechados G_1, G_2 de G dizem-se discretamente relacionados se existir $A \subseteq G$ tal que $G \setminus A$ tem medida nula (para a medida de Haar) e A é união numerável de classes bilaterais $G_1 a G_2$, para aßA.*

Se G_1 e G_2 forem tais que $G_1G_2 = G$, tomando para $A = G \setminus \{1\}$, uma vez que só há uma classe bilateral, que é G tem-se que G_1 e G_2 estão discretamente relacionados. Assim, podemos adaptar um resultado de Mackey:

Proposição 3.4.3. *Sejam G_1 e G_2 dois subgrupos de um grupo localmente compacto G, tais que $G_1G_2 = G$. Sejam $H = G_1 \cap G_2$ e π_1 e π_2 representações de G_1 e G_2 respectivamente. Então,*

$$(\pi_1 \restriction_H \otimes \pi_2 \restriction_H)^G \simeq \pi_1^G \otimes \pi_2^G$$

Note-se que se f f_1, $f_2 \in \mathfrak{g}^*$ forem tais que $f = f_1 + f_2$, então $\mathfrak{l}_f = \mathfrak{l}_{f_1} \cap \mathfrak{l}_{f_2}$ e, assim, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.4.4. *Sejam f, f_1, $f_2 \in \mathfrak{g}^*$ tais que$f = f_1 + f_2$ e $\mathfrak{l}_{f_1} + \mathfrak{l}_{f_2} = \mathfrak{g}$. Então, $\eta_f \simeq \eta_{f_1} \otimes \eta_{f_2}$*

Demonstração. Comecemos por notar que, como $\mathfrak{l}_{f_1} + \mathfrak{l}_{f_2} = \mathfrak{g}$, se tem $L_{f_1}L_{f_2} = G$. Pela observação acima, temos $\mathfrak{l}_f = \mathfrak{l}_{f_1} \cap \mathfrak{l}_{f_2}$, logo $L_f = L_{f_1} \cap L_{f_2}$. Além disso, $\chi_f = \chi_{f_1} \restriction_{L_f} \chi_{f_2} \restriction_{L_f} \simeq \chi_{f_1} \restriction_{L_f} \otimes \chi_{f_2} \restriction_{L_f}$.

Assim, pelo resultado anterior temos:

$$\eta_f = \chi_f^G = (\chi_{f_1} \restriction_{L_f} \otimes \chi_{f_2} \restriction_{L_f})^G \simeq \eta_{f_1} \otimes \eta_{f_2}$$

Como queríamos demonstrar. □

3.4.1 Módulos e factorização

Consideremos $\mathcal{A} = \mathbb{R}1 + \mathfrak{g}$ e, para qualquer $f \in \mathfrak{g}^*$ tomemos o seu módulo associado $f\mathcal{A}$. Comecemos por provar dois lemas.

Lema 3.4.5. *Sejam $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$ tais que $f_1\mathcal{A} \cap f_2\mathcal{A} = 0$. Então $\mathfrak{l}_{f_1} + \mathfrak{l}_{f_2} = \mathfrak{g}$. Além disso, $f_1\mathcal{A} \oplus f_2\mathcal{A} = (f_1 + f_2)A$*

Demonstração. Ponha-se $\mathfrak{l}_{f_1} = \mathfrak{l}_1$ e $\mathfrak{l}_{f_2} = \mathfrak{l}_2$ e considere-se $(\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2)^\perp = \mathfrak{l}_1^\perp \cap \mathfrak{l}_2^\perp$.

Temos $\mathfrak{l}_1^\perp = f_1\mathfrak{g} \subseteq f_1\mathcal{A}$ e $\mathfrak{l}_2^\perp = f_2\mathfrak{g} \subseteq f_2\mathcal{A}$, logo $\mathfrak{l}_1^\perp \cap \mathfrak{l}_2^\perp = 0$ e, portanto $(\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2)^\perp = 0$.

Assim, concluímos que

$$\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 = ((\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2)^\perp)^\perp = 0^\perp = \mathfrak{g}$$

Seja $f = f_1 + f_2$. Então $\ker f = \ker f_1 \cap \ker f_2$. Para $i \in \{1, 2\}$, temos $(f_i\mathcal{A})^\perp = (f_i\mathbb{R} + f_i\mathfrak{g})^\perp = (f_i\mathbb{R})^\perp \cap (f_i\mathfrak{g})^\perp$.

No entanto

$$f_i\mathbb{R}^\perp = \{x \in \mathfrak{g} : \forall \alpha \in \mathbb{R}, : \ f(\alpha x) = 0\} = \ker f_i \quad f_i\mathfrak{g}^\perp = \mathfrak{l}_i$$

Por outro lado, $(f_1\mathcal{A} \oplus f_2\mathcal{A})^\perp = (f_1\mathcal{A})^\perp \cap (f_2\mathcal{A})^\perp = (\ker f_1 \cap \mathfrak{l}_1) \cap (\ker f_2 \cap \mathfrak{l}_2) = \ker f \cap \mathfrak{l}_f = f\mathcal{A}^\perp$ e, portanto, temos que $f_1\mathcal{A} \oplus f_2\mathcal{A} = f\mathcal{A}$.

□

O resultado de factorização está ligado à decomposição de módulos em componentes indecomponíveis.

Para $f \in \mathfrak{g}^*$, o seu módulo associado $f\mathcal{A}$ é, em particular, um subespaço vectorial de $\mathfrak{g}^*$ e, portanto, é de dimensão finita, logo, admite uma série de composição. Assim, pelo Teorema de KrullŰSchmidt, este admite uma decomposição, única a menos de isomorfismo, em módulos indecomponíveis. Introduza-se assim a seguinte definição:

Definição 19 (Super-representação elementar). *Para $f \in \mathfrak{g}^*$, dizemos que a super-representação η_f que lhe está associada, é elementar se o módulo $f\mathcal{A}$ for indecomponível.*

Além disso, o corolário 3.4.4 sugere a definição de *conjunto básico* para conjuntos de órbitas coadjuntas ou bi-órbitas:

Definição 20 (Conjunto básico). *Um conjunto X de órbitas coadjuntas (ou bi-órbitas) diz-se básico se para quaisquer $\Omega_1,\ \Omega_2 \in X,\ \Omega_1 + \Omega_2 \notin X$*

Proposição 3.4.6 (Factorização de Super-representações). *Seja $f \in \mathfrak{g}^*$. Então η_f admite uma factorização essencialmente única em super-representações elementares. Isto é,*

- *Se $f\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} f_i\mathcal{A}$, em que $f = f_1 + ... + f_n$ e $f_i\mathcal{A}$, $1 \leq i \leq n$, são indecomponíveis, então $\eta_f \simeq \bigotimes_{i=1}^{n} \eta_{f_i}$;*
- *Se $\eta_f \simeq \bigotimes_{i=1}^{n} \eta_{f_i}$, em que η_{f_i}, $1 \leq i \leq n$, são elementares, então, $f\mathcal{A} \simeq \bigoplus f_i\mathcal{A}$;*

Demonstração. Pelo teorema de Krull-schmidt $f\mathcal{A}$ admite uma decomposição em indecomponíveis e não é difícil ver que podemos tomar os constituintes indecomponíveis cíclicos, de modo a que a soma dos geradores seja f, isto é $f\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} f_i\mathcal{A}$ e $f = f_1 + ... + f_2$. Aplicando 3.4.4 indutivamente, com a ajuda de 3.4.5, concluímos que $\eta_f \simeq \bigotimes_{i=1}^{n} \eta_{f_i}$.

Admitamos agora que $\eta_f \simeq \bigotimes_{i=1}^{n} \eta_{f_i}$, em que todas as super-representações η_{f_i} são elementares e seja $k = f_1 + ... + f_n$. Recorrendo a 3.4.4 e 3.4.5 concluímos que $\bigotimes_{i=1}^{n} \eta_{f_i} \simeq \eta_k$.

Ora, temos $\eta_f \simeq \eta_k$, e portanto, $GfG = GkG$, logo existem $g,\ h \in G$ tais que $f = gkh$, logo $f\mathcal{A} = gk\mathcal{A} \simeq k\mathcal{A} = \bigoplus f_i\mathcal{A}$.

□

Corolário 3.4.7. *Para todo $f \in \mathfrak{g}^*$ existe um conjunto básico X tal que $\eta_f \simeq \bigoplus_{x \in X} \eta_{f_x}$*

Demonstração. Tome-se a factorização obtida pela proposição anterior, $\eta_f \simeq \bigotimes_{i=1}^{n} \eta_{f_i}$. Seja Ω_i a bi-órbita de f_i e tome-se $U = \{\Omega_i : \ 1 \leq i \leq n\}$.

Por 3.4.2 temos $\eta_f \simeq \int^{\oplus}_{\sum_{i=1}^{n} \Omega_i} \pi d\mu$. Basta assim tomar um subconjunto X de U que seja básico e tal que $\sum_{i=1}^{n} \Omega_i = \sum_{\Omega \in X} \Omega$. $\square$

Observação 3. *Dado um módulo $f\mathcal{A}$, pelo teorema de Krull-Schmidt este admite uma decomposição única, a menos de isomorfismo, em componentes indecomponíveis. No entanto nem toda a decomposição isomorfa de $f\mathcal{A}$ dá origem a uma factorização de η_f, pois módulos isomorfos podem, em geral, não estão associados a η-representações equivalentes.*

Por exemplo, se $\mathfrak{g}$ for abeliana, as bi-órbitas são conjuntos singulares, logo, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, η_f não é equivalente a $\eta_{\alpha f}$, mas $\alpha f\mathcal{A} = f\mathcal{A}$.

4
Grupo Unitriangular

Neste capítulo iremos determinar a teoria canónica de super-representações do grupo unitriangular $U_n = 1 + \mathfrak{u}_n$.

Para tal, é necessário determinar a acção de U_n em $\mathfrak{u}_n^*$, calcular L_f para $f \in \mathfrak{u}_n^*$, determinar o carácter associado e por fim induzi-lo.

No entanto, iremos fazer tal estudo apenas para uma família de elementos de $\mathfrak{u}_n^*$ e, seguidamente, recorrer à proposição 3.4.6 para determinar todas as super-representações. Comecemos por identificar o dual $\mathfrak{u}_n^*$ com as matrizes triangulares estritamente inferiores, com entradas em $\mathbb{R}$. Assim, dado $f \in \mathfrak{u}_n^*$ e $x \in \mathfrak{u}_n^*$ definimos,

$$f(x) := \mathrm{Tr}(fx)$$

Como usualmente, seja $e_{i,j}$ a matriz que só tem um na entrada (i, j) e zeros nas restantes. Assim, $\mathcal{B} = \{e_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n\}$ é uma $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{u}_n$. Podemos, portanto, considerar a base dual de $\mathfrak{u}_n^*$, que é dada por $\{e_{i,j}^* : 1 \leq i < j \leq n\}$, onde, para todo o (i, j) $e_{i,j}^*$ não é mais do que a matriz $e_{j,i}$.

Iremos numa primeira etapa estudar as super-representações associadas aos elementos de $\mathcal{B}$ e, de seguida, recorrer ao resultado 3.4.6 para determinar todas as super-representações.

Mencionamos desde já o análogo existente para o grupo unitriangular sobre um corpo finito (ver [?] para o caso de característica ímpar).

4.1 Super-representações associadas a $e^*_{i,j}$

Comecemos por determinar as acções de U_n em $\mathfrak{u}^*_n$. Tendo em conta a identificação feita do dual com as matrizes triangulares inferiores, não é difícil de ver que

$$ge^*_{i,j} = (ge_{j,i})_{\text{inf}} \quad g \in U_n$$

onde X_{inf} denota a submatriz triangular inferior obtida da matriz X.

Por outro lado, analogamente temos que

$$e^*_{i,j}g = (e_{j,i}g)_{\text{inf}} \quad g \in U_n$$

Assim, uma vez que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathfrak{u}^*_n$, as acções de U_n em $\mathfrak{u}^*_n$ ficam totalmente determinadas.

No que segue, deixaremos cair o índice "‘inf"’, fazendo sempre essa identificação.

Calculemos agora $L_{i,j} = L_{e^*_{i,j}} = \{g \in U_n : \ ge_{j,i} = e_{j,i}\}$. Para $g \in U_n$ arbitrário

$$t \neq i \Longrightarrow (ge_{j,i})_{k,t} = 0, \ \forall k > t;$$

$$(ge_{j,i})_{k,i} = g_{k,j}, \forall k > i;$$

Assim, se $g \in L_{j,i}$, tem-se $g_{k,j} = 0$, para $k \neq i$ e $g_{i,j} = 1$, logo

$$L_{i,j} = \{g \in U_n : \ g_{k,j} = 0, \ k > i\}$$

Por outro lado, de um modo análogo, não é difícil de ver que $R_{i,j} = R_{e^*_{i,j}} = \{g \in U_n : \ g_{i,k} = 0, \ k < j\}$

Exemplo 7. *Considere-se U_8 e tome-se $e^*_{3,6}$. Então um elemento de $L_{3,5}$ é da forma*

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & \ldots & & & 1 & 0 & * & * \\ 0 & \ldots & & & & 1 & * & * \\ 0 & \ldots & & & & & 1 & * \\ 0 & \ldots & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Construa-se agora a super-representação, começando por considerar carácter associado a $e^*_{i,j}$. Este vem dado por

$$\begin{aligned} \chi_{i,j} : L_{i,j} &\to \mathbb{C} \\ 1 + x &\mapsto e^{2i\pi \mathrm{Tr}(e_{j,i}x)} \end{aligned}$$

Deste modo temos que $\eta_{e_{j,i}} = \eta_{j,i} = (\chi_{j,i})^{U_n}$, que actua em

$$\mathscr{H}_{j,i} = \{\phi \in L^2(U_n) : \forall h \in L_{j,i},\ g \in U_n,\ \phi(hg) = \chi_f(h)\phi(g)\}$$

Lema 4.1.1. *Para $1 \leq i < j \leq n$, a representação $\eta_{j,i}$ é irredutível.*

Demonstração. Atendendo à natureza de $L_{i,j}$ e $R_{i,j}$ temos claramente que $\mathfrak{r}_{i,j} + \mathfrak{l}_{i,j} = \mathfrak{u}_n$ e, portanto, invocando a proposição 3.3.4, vem o desejado. □

Em relação à bi-órbita $U_n e_{j,i} U_n$, contas elementares com matrizes mostram que

$$\begin{aligned} (ge_{j,i}h)_{j,k} &= h_{i,k}, \quad i < k \leq j-1 \\ (ge_{j,i}h)_{t,i} &= g_{t,j}, \quad i-1 \leq t < j \\ (ge_{j,i}h)_{t,k} &= g_{k,j}h_{i,t}, \quad i < k,\ t < j \end{aligned}$$

sendo as restantes entradas iguais a zero.

Exemplo 8. *Voltemos a considerar U_8 e o elemento $e^*_{3,6}$, um elemento genérico da bi-órbita é da forma*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & \star & \star & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde os elementos $\star$ são definidos à custa dos elementos $*$.

Uma propriedade importante da base das matrizes elementares é que os módulos associados são indecomponíveis. Tome-se $e^*_{i,j}$ e seja $\mathcal{A}_{i,j} = e^*_{i,j}\mathcal{A}$.

Se $a \in \mathcal{A}$, temos, para $1 \leq t < k \leq n$

$$(e^*_{i,j}a)_{k,t} = 0, \ \forall k \neq j$$
$$(e^*_{i,j}a)_{k,t} = a_{i,t}, \ k = j$$

Assim, se existirem submódulos não triviais M e N de $\mathcal{A}_{i,j}$ tais que $M \oplus N = \mathcal{A}_{i,j}$, então existem $m \in M$ e $n \in N$, não nulos, tais que $m + n = e_{j,i}$.

Se $m_{j,i} \neq 0$, então, tomando $a \in \mathcal{A}$ adequado temos $ma = e_{j,i}$, e portanto $M = \mathcal{A}_{i,j}$. Logo $m_{j,i} = 0$ e, analogamente, $n_{j,i} = 0$.

Deste modo não é possível ter $m + n = e_{j,i}$ e, portanto, $\mathcal{A}_{i,j}$ é indecomponível.

Denotemos por $\eta_{\alpha,i,j}$ a super-representação determinada por $\alpha e^*_{i,j}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esta super-representação é elementar. Veremos que toda a super-representação é efectivamente factorizada por super-representações deste tipo.

4.2 Conjuntos de entradas básicos, Bi-órbitas e factorização

Em analogia com a definição de conjunto básico, dada em 20, introduza-se o conceito de *conjunto de entradas básico* e veja-se a sua relação com as bi-órbitas.

Definição 21 (Conjunto de entradas básico)**.** *Seja $D \subseteq \{(j,i) : 1 \leq j < i \leq n\}$, um conjunto de entradas de matrizes do tipo $n \times n$. Este diz-se básico se em cada linha e em cada coluna existe no máximo um elemento não nulo, isto é, se para todo o $1 \leq j < i \leq n$*

$$\#(D \cap \{(k,i) : \ 1 < k \leq\}) \leq 1 \quad \#(D \cap \{(j,t) : \ 1 \leq t < n\}) \leq 1$$

Todo o elemento de f de $\mathfrak{u}^*_n$ se escreve como soma de elementos da forma $e^*_{i,j}$ e, portanto, existe um subconjunto $D \subseteq \{(j,i) : 1 \leq j < i \leq n\}$ tal que

$$f = \sum_{(j,i) \in D} \alpha_{j,i} e_{j,i}$$

onde $\alpha(j,i) \in \mathbb{R}$.

Provaremos que existe $D' \subseteq D$, básico, tal que, se $f' = \sum_{(j,i)\in D'} e_{j,i}$, então $\eta_f \simeq \eta_{f'}$.

Considere-se uma ordem parcial $\preceq$ em $\{(j,i) : 1 \leq j < i \leq n\}$ definida do seguinte modo: $(j,i) \preceq (j',i')$ se e só se $(j = j'$ e $i \leq i')$ ou $(i = i'$ e $j' \leq j)$.

Assim, dado $D \subseteq \{(j,i) : 1 \leq j < i \leq n\}$, podemos extrair um subconjunto básico

$$D_0 = \{(j,i) \in D : \ (j,i) \prec (j,k),(t,i) \ \ \forall (j,k),(t,i) \in D\}$$

Exemplo 9. *Dado* $D = \{(3,2),(5,2),(5,4),(6,3),(6,5)\}$*, vejamos como obter* $D_0 = \{(5,2),(7,3)\}$*.*

Os elementos de D *podem ser visualizados numa matriz como*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando os elementos minimais, representados pelas caixas pretas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \square & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & \square & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & \square & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtemos assim a matriz associada a D_0*, onde apenas as entradas minimais são consideradas*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Atendendo à forma das bi-órbitas dos elementos $e^*_{i,j} = e_{j,i}$, é fácil concluir que, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos $U_n(\alpha e_{j,i})U_n + U_n(\beta e_{j',i'})U_n = U_n(\alpha e_{j,i})U_n$, sempre que $(j,i) \prec (j',i')$ e, portanto, temos o seguinte lema:

Lema 4.2.1. *Se $D \subseteq \{(j,i) : 1 \leq j < i \leq n\}$, então $\sum_{(j,i)\in D} U_n\alpha_{j,i}e_{j,i}U_n = \sum_{(j,i)\in D_0} U_n\alpha_{j,i}e_{j,i}U_n$, onde $D_0 \subseteq D$ como acima.*

Assim temos o seguinte resultado importante:

Proposição 4.2.2. *Toda a super-representação de U_n admite uma factorização em produto tensorial de representações irredutíveis. Mais, se $f = \sum_{(j,i)\in D} \alpha_{i,j}e^*_{i,j}$, então $\eta_f \simeq \bigotimes_{(j,i)\in D_0} \eta_{\alpha_{i,j}i,j}$.*

Demonstração. A demonstração recorre a tudo o que vimos até agora. Comecemos por tomar $f = \sum_{(j,i)\in D} \alpha_{i,j}e^*_{i,j}$, temos então

$$f\mathcal{A} = \bigoplus_{(j,i)\in D} \alpha_{i,j}e^*_{i,j}\mathcal{A}$$

.

Assim, invocando a proposição 3.4.6, sendo $\alpha_{i,j}e^*_{i,j}\mathcal{A}$ indecomponível para todo $(j,i) \in D$, concluímos que

$$\eta_f \simeq \bigotimes_{(j,i)\in D} \eta_{\alpha_{i,j},i,j}$$

Por outro lado, atendendo a 3.4.2 e a 4.2.1, concluímos que

$$\eta_f \simeq \bigotimes_{(j,i)\in D_0} \eta_{\alpha_{j,i},j,i}$$

$\square$

5 Trabalho futuro

Definida a teoria de super-representações para um grupo de Lie e tendo construido uma teoria explícita para os grupos álgebra, surgem perguntas naturais de interesse particular.

Geometria das bi-órbitas: Sabemos que as bi-órbitas são variedades e que são união de órbitas coadjuntas. No entanto a sua geometria não foi estudada no presente trabalho.

A importância do estudo desta geometria e das ligações com a geometria das órbitas coadjuntas é visível, por exemplo, quando é abordada a temática da restrição de super-representações. Ora, no caso dos grupos de Lie nilpotentes, conexos e simplesmente conexos, o espectro da restrição de representações irredutíveis tem ligações intimas com a geometria das órbitas coadjuntas. Em particular, a multiplicidade de uma representação irredutível na decomposição da restrição é dada pelo o número de órbitas coadjuntas contidas num determinado conjunto (uma vez mais voltamos a referir [23]).

Assim, o conhecimento da geometria das bi-órbitas é algo de essencial no que diz respeito à restrição de super-representações.

Restrição: Sejam G um grupo álgebra e H um seu subgrupo álgebra. Tanto G como H admitem teorias de super-representações canónicas. A restrição de uma super-representação de G a H é um problema clássico: relacionar a restrição de uma super-representação de G com as super-representações de H.

Como referimos, o conhecimento da geometria das bi-órbitas parece ser fulcral para este estudo.

Uma questão mais subtil é a da construção de super-representações para um qualquer subgrupo H de G, a partir da restrição.

No caso finito é uma questão complicada, havendo no entanto avanços interessantes no que diz respeito à restrição de subgrupos definidos à custa de involuções ([4]). Neste processo recorre-se à correspondência de Glauberman, ferramenta essa que não se encontra disponível quando trabalhamos com grupos não finitos.

No entanto, temos à nossa disposição toda a maquinaria desenvolvida por Kirillov e Mackey, podendo fazer a construção por restrição passo a passo, considerando sucessivamente subálgebras de codimensão um, obtendo possivelmente teorias de super-representações para grupos que não são necessariamente grupos álgebra.

Generalizações: Como foi referido, um dos problemas da construção apresentada é ser exclusiva dos grupos álgebra. No entanto, em 3.2.1, referimos que a bi-acção pode ser encarada como uma instância da acção-Ψ.

Se G for um grupo de Lie arbitrário, a acção-Ψ, descrita em 3.2.1, é considerada do seguinte modo. Tome-se $\Psi : G \times G \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ tal que $\Psi(g,h)x = d(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \mathcal{R}_h)_1 x$ (onde $\mathcal{L}_g$ e $\mathcal{R}_h$ são as translações à esquerda e à direita respectivamente). Define-se a acção-Ψ em $\mathfrak{g}^*$ por

$$\Psi^*(g,h)f(x) = f(\Psi(g,h)^{-1}x) \quad g,h \in G,\ f \in \mathfrak{g}^*,\ x \in \mathfrak{g}$$

Tendo esta acção, podemos considerar a acção-Ψ_L de G em $\mathfrak{g}^*$:

$$\Psi_L(g)f(x) = f(\Psi(g,1)^{-1}x) \quad g \in G,\ f \in \mathfrak{g}^*,\ x \in \mathfrak{g}$$

sendo esta a acção análogo da acção esquerda. Definindo $L'_f = \{g \in G : \Psi_L(g)f = f\}$, isto é, o estabilizador para a acção-Ψ_L, poderíamos fazer a construção análoga à que foi feita para os grupos álgebra.

Existem, no entanto dificuldades, e tecnicalidades com esta abordagem. Mas, da mesma maneira que a bi-acção é um relaxamento da acção coadjunta, nos grupos álgebra, temos também que a acção-Ψ é um relaxamento da acção coadjunta para um grupo arbitrário.

Por outro lado, o método das órbitas, ainda que seja uma ferramenta poderosa nos grupos exponênciais, não funciona na íntegra neste grupos. É possível que a construção de super-representações por este método forneça uma teoria manejável, que retenha os aspectos fundamentais das representações irredutíveis.

A teoria de Supercaracteres

A

A teoria de supercaracteres visa ser uma generalização da toria de caracteres irredutíveis usuais, no sentido em que não só os caracteres irredutíveis são ainda uma teoria de supercaracteres, como as propriedades fundamentais dos caracteres irredutíveis são verificadas na teoria de supercaracteres.

Este apêndice pretende ser uma pequena introdução ao tema, de modo a motivar o trabalho realizado, e a fornecer alguma intuição. Embora os resultados obtidos para as super-representações sejam essencialmente análogos, as suas demonstrações são, em geral diferentes, uma vez que num caso nem sempre estão disponíveis as ferramentas do outro (por exemplo, argumentos de contagem não podem ser utilizados nos grupos de Lie).

Assim, no que segue, apresentaremos alguns aspectos gerais da teoria de supercaracteres, sem no entanto sermos demasiado rigorosos. Seguiremos, essencialmente o que é feito em [6], sendo esta a principal referência no que diz respeito às demonstrações.

Uma vez que se trata de um apêndice introdutório e motivacional, não sendo relevante para o desenvolvimento do trabalho, alguma terminologia é introduzida levianamente.

A.1 Teoria de supercaracteres

Comecemos por fixar alguma notação e terminologia. G denotará um grupo finito, $\mathbb{K}$ denotará um corpo finito. Por uma álgebra entenderemos uma álgebra associativa sobre $\mathbb{K}$ sem unidade. Além disso, $\mathrm{Irr}(G)$ denotará o conjunto dos caracteres complexos irredutíveis de G, como usualmente.

Sejam $\mathscr{K}$ uma partição de G e $\mathscr{X}$ uma partição de $Irr(G)$; numa partição admitimos que nenhum elemento é o conjunto vazio. Dado $X \in \mathscr{X}$ defina-se o carácter de G

$$\sigma_X = \sum_{\psi \in X} \psi(1)\psi$$

Definição 22 (Teoria de supercaracteres)**.** *Sejam $\mathscr{K}$ e $\mathscr{X}$ como acima e, para todo $X \in \mathscr{X}$, seja χ_X um múltiplo constante de σ_X. Dizemos que o triplo $(\mathscr{X}, \mathscr{K}, \{\chi_X\}_{X \in \mathscr{X}})$ forma uma teoria de supercaracteres de G se:*

- *$\#\mathscr{X} = \#\mathscr{K}$;*
- *para todo o $x \in \mathscr{X}$, χ_X é constante nos elementos de $\mathscr{K}$;*
- *$\{1\}$ é um elemento de $\mathscr{K}$*

Se $(\mathscr{X}, \mathscr{K}, \{\chi_X\}_{X \in \mathscr{X}})$ for uma teoria de supercaracteres aos elementos de $\mathscr{K}$ chamamos super-classes e os elementos χ_X, com $X \in \mathscr{X}$ chamamos supercaracteres de G.

Note-se que, se ρ_G for o carácter regular de G, então $\sum_{X \in \mathscr{X}} \sigma_X = \rho_G$.

Dado um grupo finito G, este admite sempre duas teorias de supercaracteres, nomeadamente: a teoria onde as superclasses são as classes de conjugação e os supercaracteres são os caracteres irredutíveis; a teoria onde $\mathscr{K} = \{\{1\}, G \setminus \{1\}\}$ e $\mathscr{X} = \{\{1_G\}, \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}\}$.

A estas teorias chamamos *teorias triviais*. Assim a noção de teoria de supercaracteres não é vazia.

Para alguns grupos, estas são de facto as únicas teorias existentes. No entanto existem muitos grupos onde tal não é o caso. Da definição, dada uma teoria de supercaracteres, é evidente que dado um carácter irredutível, este é constituinte de um e um só supercaracter,e portanto supercaracteres são ortogonais para o produto escalar de Frobenius; sendo estas as propriedades fundamentais da teoria de supercaracteres.

Como foi referido, os supercaracteres são uma generalização da teoria de caracteres irredutíveis. Assim, da mesma maneira que os caracteres irredutíveis formam uma base ortogonal para as funções de classe, temos o seguinte resultado:

Proposição A.1.1. *Sejam $\mathscr{K}$ e $\mathscr{X}$ partições como acima e, dado $X \in \mathscr{X}$, tome-se χ_X tal que $(\mathscr{X}, \mathscr{K}, \{\chi_X\}_{X \in \mathscr{X}})$ forme uma teoria de supercaracteres* *para G. Então os supercaracteres formam uma base das funções de G para $\mathbb{C}$ que são constantes nas superclasses.*

A.2 Teoria de supercaracteres para grupos álgebra

Considere-se uma álgebra J nilpotente e consideremos o grupo $G = 1 + J$, onde o produto é dado por

$$(1+x)(1+y) = 1 + x + y + xy,\ \forall x, y \in J$$

sendo o inverso de $1+x$ dado por $1+\sum_{i=1}^{\infty}(-x)^i$; uma vez que J é nilpotente, esta soma é necessariamente finita. Temos assim a seguinte definição:

Definição 23. *Se J for uma álgebra nilpotente, definimos o grupo álgebra associado a J como sendo $G = 1 + J$*

Seja $J^o = \mathrm{Irr}(J, +)$. Podemos considerar duas acções naturais de G em J^o: a acção à esquerda e à direita dadas por:

$$(g\lambda)(x) = \lambda(xg),\ \ (\lambda g)(x) = \lambda(gx)\quad g \in G,\ \lambda \in J^o,\ x \in J$$

Note-se que, dados $g \in G$ e $x \in J$, temos $xg,\ gx \in J$ e, portanto as acções estão bem definidas. Além disso, estas acções são compactíveis, no sentido em que, dados $\lambda \in J^o$ e $g, h \in G$ temos

$$(g\lambda)h = g(\lambda h)$$

Deste modo podemos considerar assim a bi-órbita $G\lambda G$.

De um modo natural, e análogo, podemos definir "‘acções"’ de J em J^o, isto é:

$$y\lambda(x) = \lambda(xy),\ \ \lambda y(x) = \lambda(yx)\quad y \in J,\ \lambda \in J^o,\ x \in J$$

Tome-se $\lambda \in J^o$, seja $L_\lambda := \{g \in G : g\lambda = \lambda\} \leq G$ o estabilizador para a acção esquerda, e seja $l_\lambda = x \in J :\ x\lambda = 0$; assim, temos $L_\lambda = 1 + l_\lambda$. Analogamente para a acção direita, definimos $R_\lambda = \{g \in G :\ \lambda g = \lambda\}$ e $r_\lambda = \{x \in J : \lambda x = 0\}$.

Dada a natureza de L_λ, podemos definir o carácter associado a λ como sendo

$$\begin{aligned} \tau_\lambda : L_\lambda &\to \mathbb{C} \\ 1+x &\mapsto \lambda(x) \end{aligned}$$

Sendo L_λ o estabilizador da acção esquerda, τ_λ é de facto um carácter. Defina-se agora $\chi_\lambda = (\tau_\lambda)^G$, o carácter induzido de τ_λ.

Prova-se ainda que $\chi_\lambda(1+x) = \frac{|G\lambda|}{|G\lambda G|} \sum\limits_{\mu \in G\lambda G} \mu(x)$ e, portanto, dados λ e $\mu \in J^o$, temos $\chi_\lambda = \chi_\mu$ se e só se $G\lambda G = G\mu G$.

Por outro lado, se $g = 1 + x \in G$, define-se $K_g = 1 + GxG$. Então, K_g é união das classes de conjugação dos elementos que estão em K_g.

Com a notação acima, temos:

Proposição A.2.1. *Seja $G = 1 + J$ um grupo álgebra sobre um corpo finito. Então, $\{\chi_\lambda :\ \lambda \in J^o\}$ e $\{K_g :\ g \in G\}$ formam uma teoria de supercaracteres.*

Pelo que foi mencionado cada supercarácter está associado a uma bi-órbita e, de facto, esta define univocamente o supercaracter.

Um resultado importante é o critério de irredutibilidade. A resposta é dada em termos de estabilizadores.

Proposição A.2.2. *Sejam $G = 1 + J$ um grupo álgebra e $\lambda \in J^o$. Então que χ_λ é irredutível se e só se $l_f + r_f = J$.*

Bibliografia

[1] C.A.M André, *Irreducible characters of the unitriangular group and coadjoint orbits*, PhD thesis, University of Warwick, 1992.

[2] C.A.M André, A.M Neto, *Supercharacters of the Sylow p-subgroups of the finite Symplectic and orthogonal groups*, Pacific J.Maths 239 (2) (2009) 201-230.

[3] C.A.M André, A.M Neto, *A supercharcter theory for the Sylow p-subgroups of the finite Symplectic and orthogonal groups*, Journal Of Algebra 322 (2009) 1273-1294.

[4] C.A.M André, P. J Freitas, A. M Neto, *A supercharacter theory for involutive Algebra Groups*, pre-print;

[5] E. Arias-Castro, P. Diaconis, R. Stanley, *A super-class walk on upper-triangular matrices*, J. Algebra 278 (2) (2004) 739-765.

[6] P. Diaconis, I.M Issacs, *Supercharcters and Superclasses for Algebra groups*, Trans. Amer. Soc. 360 (5) (2008) 2359-2392.

[7] A. A Kirillov, *Eléments de la thèorie des représentations*, Mir (1974).

[8] A. A Kirillov, *Lectures on the Orbit Method*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 64, AMS (2004).

[9] A. A Kirillov, *Representation Theory and Noncommutative Harmonic Analysis I*, Encyclopedia of Mathematics Vol. 22, Springer (1988)

[10] A. A Kirillov, *Unitary representation of nilpotent Lie groups*, Journal of Russian Mathematics Surveys, 17 (4), 53-104 (1962).

[11] A. A Kirillov, *Merits and demerits of the Orbit Method*, Bull. AMS, 36 (4), 433-488 (1999).

[12] J. Dixmier, *C∗-Algebras*, North-Holland Publishing Company (1977).

[13] J. Dixmier, *Enveloping Algebras*, North-Holland Publishing Company (1977).

[14] J. Dixmier, *Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents II*, Bull. Soc. Math. France, 87, 65-79 (1961).

[15] G. W Mackey, *Induced Representations of lacally Compact groups I*, Annals of Mathematics, 55 (1), 101-139 (1952).

[16] G. W Mackey, *The theory of Unitary Group Representations*, University of Chicago Press (1975).

[17] G. W Mackey, *Unitary Group Representations in Physics, Probability, and Number Theory*, BenjaminŰCummings Publishing Company (1978).

[18] M. Duflo, *Caractères des groupes et des algèbre de Lie résoluble*, Annales scientifiques de l'É.N.S, 3 (1), 23-74 (1970).

[19] M. Duflo, M. Vergne, N. V Pedersen, *The Orbit Method in Representation Theory: Proceedings of a Conference Held in Copenhagen, August to September 1988*, Birkhiiuser Boston (1990).

[20] M. A Naimark, S. V Fomin, *Continuos direct sum of Hilbert spaces*, Uspehki Mat. 10 (2), 111-142 (1955).

[21] L. Pukansky, *Unitary representations of solvable Lie groups*, Annales scientifiques de l'É.N.S, 4, 457-608 (1971).

[22] L. Corwin, F. P Greenleaf, G. Grelaud, *Direct Integral decomposition and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups*, Transaction of the A.M.S, 304 (2), 549-583 (1987).

[23] R. L Lipsman, *órbital Parameters for induced and restricted representations*, Trans. AMS, 313 (2), 433-473 (1989).

[24] L. Corwin, F. P Greenleaf, *Representation of nilpotent Lie groups and their applications: Part I, Basic theory and examples*, Cambridge University Press (1989).

[25] E. Kaniuth, K. F Taylor, *Induced Representations of Locally Compact Groups*, Cambridge University Press (2013).

[26] N. Wallach, *Real Reductive Groups II*, Academic Press Inc. (1992).

[27] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011)

[28] J. E Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and representation Theory*, Springer, 3ł edição (1977).

[29] G. Grélaud, *On representations of simply connected nilpotent and solvable Lie groups*, notas, http://www-math.univ-poitiers.fr/ grelaud/ .

[30] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover Publications Inc. (1979).

[31] J. Maes, *An Introduction to the Orbit Method*, Master thesis, Utrecht University Institute for Theoretical Physics, Universidade de Utrecht (2011).

[32] J. M. C Dias, *Feixes de Supercaracteres*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Universidade de Lisboa (2014).

[33] E. A Castro, P. Diaconis, R. Stanley, *A Super-class wak on upper triangular matrices*, Journa of Algebra, 278 (2), 739Ű765 (2004).

[34] J. L. Brumbaugh, M. Bulkow, P. S. Fleming, L. A Garcia, S. R Garcia, G. Karaali, M. Michal, A. P. Turner, *Supercharacters, exponential sums, and the uncertainty principle*, arXiv:1208.5271 [math.RT].